

代数多様体の数論幾何的予想の解決に向けた戦略的研究  
Strategic Research to solve certain conjectures  
in Arithmetic Geometry

坂内 健一 (BANNAI KENICHI)  
慶應義塾大学・理工学部・准教授



研究の概要

数論幾何の分野における主要な予想として、代数多様体上定義された代数多様体の「Bloch-加藤予想」とよばれるものがある。本研究の目的は、「ポリログ」とよばれる数学的対象に関する研究代表者の最近の革新的な研究成果を踏まえて、純粋数学分野ではほとんど例のないプロジェクト型研究として、この歴史的な大問題に組織的に挑むものである。

研究分野：数論、数論幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ポリログ関数、テータ関数、 $L$ 関数、 $p$ 進 $L$ 関数

1. 研究開始当初の背景

整数論では古くから、整数論的に重要な代数的不変量と $L$ 関数の特殊値という解析的な不変量の関係が注目されてきた。代数多様体の類数を、Dedekind ゼータ関数で書き下す「類数公式」などはこの典型的な現れである。この関係は予想として様々な場合に一般化され、最終的には Bloch と加藤和也により、代数多様体の玉河数予想 (Bloch-加藤予想とも呼ばれる) として定式化された。この予想はクレイ研究所が主催しているミレニアム懸賞問題の1つである Birch-Swinnerton Dyer 予想 (BSD 予想) をも特別な場合として含むことなどからも分かるように、整数論の中心的なテーマとして位置づけられている。

2. 研究の目的

玉河数予想の難しさは、数論的量と $L$ 関数の特殊値という、異質なものを結びつける必要があることに起因する。本研究の目的は、この両者の架け橋となりうる「ポリログ」という motivic (数論幾何的) な対象物を研究することである。「ポリログ」とは、様々な代数多様体に対して構成されている数論幾何的対象である。射影直線引く3点の場合に Beilinson と Deligne によって初めて定義され、Beilinson と Levin によって楕円曲線の場合、その後、Wildeshaus や Kings によ

てアーベル多様体の場合などに類似の構成が行われた。非常に簡単な抽象的特徴付けを持つことが強みだが、具体的に書き下すことの難しさが難点であった。研究代表者は今までの研究で、辻雄 (東大数理)、小林真一 (東北大)、Guido Kings (Regensburg 大学) との共同研究を通して、楕円曲線の場合のポリログや関連する Eisenstein 類を具体的に簡単に書き下すことに成功して来た。本研究ではこれらの成果をきちんと論文としてまとめ、さらにこれらの結果を踏まえて次の2つの事柄を目指して来た。

- 楕円曲線のポリログが具体的に記述できたことの数論的帰結を網羅的に研究する。
- アーベル多様体等、他の代数多様体の場合のポリログを具体的に記述することを試みる。

3. 研究の方法

本研究は数名の若手研究者を特任助教として雇用し、チームで行うプロジェクト型研究として進めて行く。主には、楕円ポリログや Eisenstein 類の具体的な記述という成果を踏まえて、その数論的帰結を網羅的に戦略的に研究する。

4. これまでの成果

(1) 研究代表者は小林真一氏 (東北大)、辻雄氏 (東大) との共同研究を通して、CM楕

円曲線のポリログのホッジ実現および $p$ 進実現を具体的に明示的に記述することに成功した(発表論文4,5)。

(2) 研究代表者は小林真一氏との共同研究を通して素数  $p$ がordinary場合に、虚2次体のHecke指標に付随する $p$ 進 $L$ 関数のテータ函数を用いた構成に成功した(発表論文3)。本研究プロジェクトメンバーである大槻玲氏はこの研究をさらに発展させ、 $p$ がsupersingularな場合に、虚2次体のHecke指標に付随する  $p$ 進  $L$ 関数のテータ函数を用いた構成に成功した。

(3) 研究代表者は連携研究者の Guido Kings氏 (Regensburg大) とともに虚2次体に付随するHecke指標の $p$ 進Beilinson予想の研究を進めた。まず、 $p$ 進 Eisenstein 類を明示的に表示することに成功し(発表論文2)。この結果に基づき、素数 $p$ がordinaryな場合、虚2次体に付随する Hecke 指標の  $p$ 進 Beilinson予想を証明することに成功した(発表論文1)。さらに、Kings氏の学生M. Niklasとの共同研究を通して、この結果を一般の楕円保型形式の場合にも拡張した。

(4) 特任助教の中村健太郎氏は、Trianguline表現のZariski稠密性を証明した(発表論文6)。新井啓介氏はモジュライ曲線の有理点やガロア表現の像に関する結果を得た(発表論文7, 8, 9)。加塩朋和氏は、 $p$ 進多重ガンマ関数と  $p$ 進周期の関係についての論文を執筆した(発表論文10) 津嶋貴弘氏はモジュライ曲線の還元について結果を得た(発表論文11)。

## 5. 今後の計画

本研究は当初計画で想定していた通り、順調に進んでいる。今後はアーベル多様体のポリログに相当する Hilbert modular surface の Eisenstein 類を明示化する方法を研究して行く予定である。平成23年度~平成24年度に Hilbert modular の専門家をさらに4名、特任助教として獲得することに成功した結果、今後は連携研究者の G. Kings 氏とこれらのポストドクと協力して、グループ体制で研究を押し進める。平行して、今までの楕円曲線の場合の研究は、特任助教の大槻玲氏、現在私の研究室の大学院生である広常智輝君、小野雅隆君で研究を進める。

## 6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)

1. Kenichi Bannai, Guido Kings “ $p$ -adic Beilinson conjecture for ordinary Hecke motives associated to imaginary quadratic fields” RIMS Kôkyûroku Bessatsu B25: Algebraic Number Theory

and Related Topics 2009, eds. T. Ichikawa, M. Kida, T. Yamazaki, June (2011), 9-30.

2. Kenichi Bannai, Guido Kings “ $p$ -adic elliptic polylogarithm,  $p$ -adic Eisenstein series and Katz measure” American J. Math. 132, no. 6 (2010), 1609-1654.
3. Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi “Algebraic theta functions and  $p$ -adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers” Duke Math. J. 153 no. 2 (2010), 229-295.
4. Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, and Takeshi Tsuji “On the de Rham and  $p$ -adic realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves” Annales scientifiques de l'ENS 43, fascicule 2 (2010), 185-234.
5. Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, and Takeshi Tsuji “Realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves” RIMS Kôkyûroku Bessatsu B12 : Algebraic Number Theory and Related Topics 2007, eds. M. Asada, H. Nakamura and H. Takahashi, August (2009), 33--50.
6. 中村健太郎 “2次元クリスタリン表現の Zariski 稠密性” RIMS Kôkyûroku Bessatsu B25: Algebraic Number Theory and Related Topics 2009, eds. T. Ichikawa, M. Kida, T. Yamazaki, June (2011), 161-184.
7. Keisuke Arai and Fumiya Momose “Points on  $X_0^+(N)$  over quadratic fields” Acta Arithmetica 152 (2012), 159-173.
8. Keisuke Arai and Fumiya Momose “Rational points on  $X_0^+(37M)$ ”, Journal of Number Theory 130 (2010), no. 10, 2272-2282.
9. Keisuke Arai “Galois images and modular curves”, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu
10. 加塩朋和 “ $p$ 進多重ガンマ関数と  $p$ 進周期の関係について” RIMS Kôkyûroku Bessatsu B25: Algebraic Number Theory and Related Topics 2009, eds. T. Ichikawa, M. Kida, T. Yamazaki, June (2011), 31-52.
11. Takahiro Tsushima “On the Stable Reductions of  $X_0(5^4)$  and  $X_0(7^4)$ ” to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu, Algebraic Number Theory and Related Topics 2010.

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/lab/>