

接続のモジュライ空間と パンルヴェ型方程式

神戸大学 大学院理学研究科 研究科長／教授

齋藤 政彦

(お問い合わせ先) TEL: 078-803-5614 E-MAIL: mhsaito@math.kobe-u.ac.jp



研究の背景

複素領域の代数的非線形常微分方程式の良さを判定する「パンルヴェ性」は、「その解の初期値に依存する動く特異点が極のみ」であるということです。このパンルヴェ性の観点から、1900年頃に ポール・パンルヴェが6種類の代数的非線形微分方程式（パンルヴェ方程式）のリストを与えました（図1）。1970年以降、統計力学の2次元イジング模型やランダム行列理論などで再び「パンルヴェ性」が注目を浴び、現在では数学や数理論で非常に重要な位置を占めています。しかし、この6種類のパンルヴェ方程式が「パンルヴェ性」を持つかということは自明ではなく、福原の難解な解析的証明があるだけです。

三輪・神保・上野は、パンルヴェ方程式を2階の確定・不確定特異点を許す線形接続のモノドロミー保存変形を記述する微分方程式として捉えました。「モノドロミー保存変形の非線形微分方程式は、パンルヴェ性をもつ」という一般的な原理が確立できれば、パンルヴェ方程式を含むパンルヴェ型微分方程式の世界を一気に広げられます。

研究の成果

この目的のために、2004年頃からパンルヴェ方程式の初期値空間を代数曲線上の安定有理放物接続のモジュライ空間として厳密に捉え、リーマン・ヒルベルト対応の幾何学を確立するというアイデアのもとに稲場・岩崎・齋藤の共同研究を始めました。2006年の論文で、射影

直線上のn点でたかだか1位の極を持つ、留数行列の固有値を固定した2階の安定放物接続のモジュライ空間を非特異シンプレクティック代数多様体として構成しました。また、接続にその解のモノドロミー表現を対応させるリーマン・ヒルベルト対応が、固有な双有理全射正則写像となることを示しました（図2）。

このことから、上記のモノドロミー保存変形の方程式は、幾何学的パンルヴェ性を満たすことの厳密な証明が従います。特にn=4の場合から、パンルヴェV型方程式のパンルヴェ性が得られます。その後、稲場が任意種数の代数曲線上で確定特異点のみを許す場合、稲場・齋藤が不分岐な不確定特異点の場合に拡張しました。「一般種数の代数曲線上の接続のモノドロミー保存変形の方程式は、幾何学的パンルヴェ性をもつ」という原理を多くの場合に確立できました。

今後の展望

基盤研究（S）の最終年度である2016年12月には、神戸大学で国際研究集会「Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016」を開催しましたが（図3）、現在、国際共同研究などにより、接続のモジュライ空間自体の代数幾何的構造、微分幾何的構造についても研究が進展しています。近年、パンルヴェ方程式のτ関数の漸近展開と共形場理論の関係や量子曲線と位相的漸化式の理論も報告されています。数学・数理論学におけるモノドロミー保存変形の幾何学の本質を深く理解することがこれからの目的です。

関連する科研費

2004-2006年度 基盤研究（B）「モジュライ空間と可積分系の新しい展開」

2007-2011年度 基盤研究（S）「代数幾何と可積分系の融合と新しい展開」

2012-2016年度 基盤研究（S）「代数幾何と可積分系の融合と深化」

$$\begin{aligned}
 P_I: \quad \frac{d^2 q}{dt^2} &= 6q^2 + t, \\
 P_{II}: \quad \frac{d^2 q}{dt^2} &= 2q^3 + tq + \alpha, \\
 P_{III}: \quad \frac{d^2 q}{dt^2} &= \frac{1}{q} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{t} (\alpha q^2 + \beta) + \gamma q^3 + \frac{\delta}{q}, \\
 P_{IV}: \quad \frac{d^2 q}{dt^2} &= \frac{1}{2q} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2} q^3 + 4tq^2 + 2(t^2 - \alpha)q + \frac{\beta}{q}, \\
 P_V: \quad \frac{d^2 q}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{q-1} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dq}{dt} + \frac{(q-1)^2}{t^2} \left(\alpha q + \frac{\beta}{q} \right) + \gamma \frac{q}{t} + \delta \frac{q(q+1)}{q-1}, \\
 P_{VI}: \quad \frac{d^2 q}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-t} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right) \\
 &\quad + \frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha - \beta \frac{t}{q^2} + \gamma \frac{t-1}{(q-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{t(t-1)}{(q-t)^2} \right).
 \end{aligned}$$

図1 6種類のパンルヴェ方程式

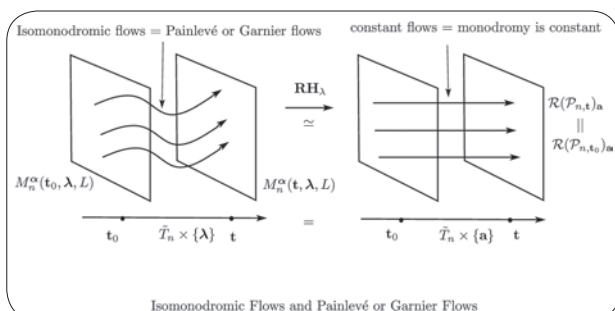


図2 リーマン・ヒルベルト対応RHとモノドロミー保存変形
左側が、接続のモジュライ空間の族、右側はモノドロミー表現のモジュライ空間でRHはファイバー毎の解析的同型を導いている。



図3 国際研究集会「Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016」、2016年12月神戸大学百年記念館