

# <複雑な系の上の確率過程>

京都大学 数理解析研究所 教授  
**熊谷 隆**



### 研究の背景

高分子や複雑なネットワークの上で、熱はどのように伝わるのでしょうか(図1)? このような空間ではフーリエ解析など従来の解析学的手法が適用できないため、あまり解析が進んでいませんでしたが、1960年代以降、数理物理学者が自己相似性を手がかりにして複雑な系の上の物理現象を研究するようになり、様々な予想が提出されました。その1つが、パーコレーションクラスターと呼ばれるランダムなグラフ(図2)におけるAlexander-Orbach予想で、臨界確率においては異常拡散現象が起こり、もとの空間の次元によらず、スペクトル次元と呼ばれる熱核の対角成分の漸近挙動のオーダーが $4/3$ になるという予想です。数学サイドでは、複雑な系の典型例であるフラクタル上の確率過程やラプラス作用素の研究が1980年代後半から始まり、異常拡散現象の厳密な解析や、異常拡散を引き起こす幾何学的・解析学的な構造が明らかになってきました。

### 研究の成果

これまでの継続的な研究で、私は、M. T. Barlow氏、B. M. Hambly氏、D. A. Croydon氏ら多くの共同研究者とともに、フラクタル上の確率過程を起点に複雑な系の熱伝導の解析とその摂動安定性の研究を進め、この理論をランダム媒体にも適用できるよう汎用化してきました。その結果、高次元有向散開パーコレーションなどのモデルでAlexander-Orbach予想を解決し、複雑な系におけるスペクトル次元を導出するための十分条件をチェック可能な形

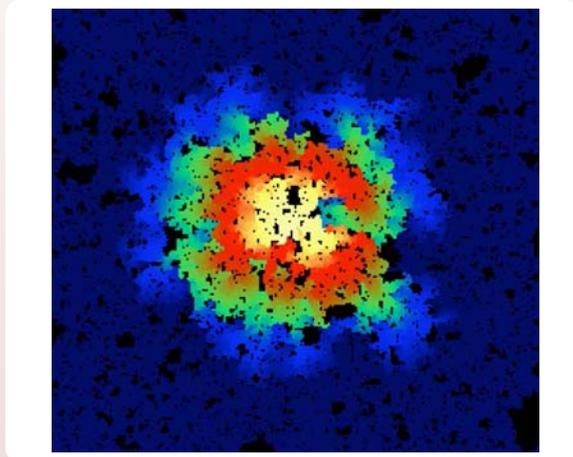


図1 パーコレーション上の熱伝導(M.T. Barlow氏提供)

でまとめました。これに関連して、Erdős-Reñyiランダムグラフを典型例とする有限グラフの族において、その上のダイナミクスがどのくらいの時間で「定常状態」に近づくかを解析し、ランダムグラフ上のランダムウォークのスケール極限への収束についても成果をあげています。

### 今後の展望

複雑な系の上の物理現象は、ネットワークの上のウイルスがどのようなスピードで拡散するか、汚染物質が土壌にしみ込む際のスピードはどうなるか、といった身近な問題とも深く関係しています。そこで、企業の方々も含めた様々な分野の人達との交流を通じて、私たちの結果を諸分野にフィードバックし、新たな数学モデルを模索する試みを進めています。

純粋数学の観点からも、離散モデルとそのスケール極限として現れる共形不変なモデルの研究が世界的にきわめて活発に研究されており(例えばSLEやrandom planar mapの研究など)、これらの上のダイナミクスを研究することが今後の大きな課題です。

### 関連する科研費

平成21-22年度 挑戦的萌芽研究「低次元臨界確率パーコレーション上のダイナミクスとそのスケール極限」

平成22-24年度 基盤研究(B)「複雑な系の上のマルコフ連鎖とその極限過程の研究」

平成25-28年度 基盤研究(A)「複雑な系の上の確率過程—離散モデルとそのスケール極限の解析」

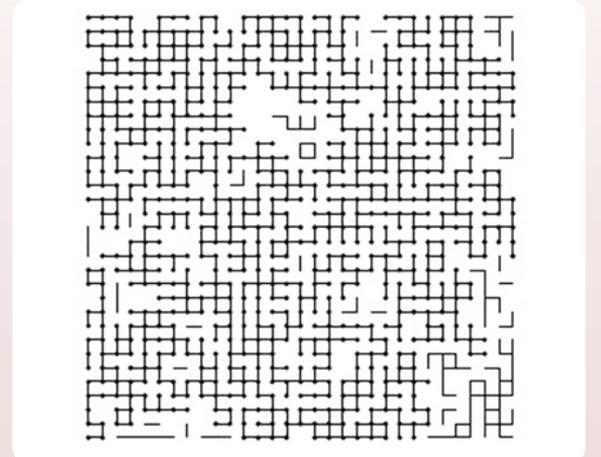


図2 パーコレーションクラスター