【基盤研究（S）】

最適輸送理論とマルコフ過程による測度距離空間の解析学

研究代表者	福岡大学・理学部・教授 桑江 一洋（くわえ かずひろ）　研究者番号:80243814
研究課題情報	課題番号：22H04942　研究期間：2022年度～2026年度 キーワード：Dirichlet 形式、マルコフ過程、測度距離空間、RCD空間、準RCD空間

なぜこの研究を行おうと思ったのか（研究の背景・目的）

●研究の全体像

図形の形状を特徴づけるのに近年最適輸送理論と呼ばれる物資の総輸送コストの最小化に基づく数学理論が注目を浴びて盛んに研究されている。この手法が登場する以前は距離の概念が入った空間いわゆる距離空間だけで図形の曲がり具合の下限を記述するというアレキサンドロフ空間の研究が主流であった。アレキサンドロフ空間はポアンカレ予想・幾何化予想の解決への重要なステップとして応用され、その重要性は今日では明白である。しかるに図形の曲がり具合(断面曲率)の下限にはもっと弱い定式化があり、アレキサンドロフ空間はそのような弱い条件に対応する概念ではなかった。そのような図形の弱い曲がり具合(リッチ曲率と呼ぶ)の下限を特徴づけるのに「距離」の概念だけでは不十分で、図形の体積等を与える「測度」の概念を併せ持つ「測度距離空間」が適切である。そのため、最適輸送理論で扱う図形の概念は「測度距離空間」の枠組みで定式化することになっている。古典的な図形の枠組みであるリーマン多様体は各点での接ベクトルに「大きさと角度」の概念を入れたもので、これを「ベクトルの内積」と呼び、この内積を「リーマン計量」と呼ぶ。リーマン計量のおかげでリーマン多様体では微積分を展開することができる、例えば２点間の距離や図形の体積等を考えることができる。現時点において最適輸送理論で特徴付けられる図形の枠組み(曲率次元空間と呼ぶ)は古典的な図形の枠組みであるリーマン多様体全体を完全に含んでいる状態ではない。本研究の目的は、最適輸送理論のみならずランダムな現象を記述するマルコフ過程の理論も用いて、古典的な図形の概念である「リーマン多様体」全体を包括する理論とその枠組みでの解析学と幾何学を展開し、諸問題の解決へのフィードバックや新たな応用を目指すものである。

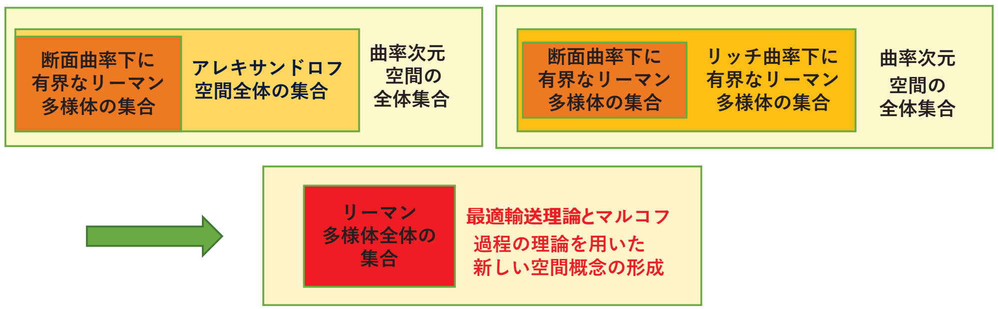

図1　研究の背景・目的のイメージ図

●研究の手法（研究課題内容）

以下の６つの課題を軸に研究を進めていく。(a) 変数型のリッチ曲率下限概念一般化 (b) リーマン多様体の亜種である劣リーマン多様体の一般化とその応用　(c) 測度集中不等式を用いた次元削減問題の研究と機械学習理論における多様体学習の理論的基盤の整備　(d) 既存の枠組みには入らない重み付きリーマン多様体上での負または1以下のパラメータで特徴づけられたリッチ曲率下限条件下での幾何解析および確率解析 (e) 上述の研究課題を動機付けとするマルコフ過程の確率解析 (f) フィンスラー多様体上の幾何解析

●研究の手法（研究計画・方法等）

先に述べた研究課題内容に加えて以下のように研究を遂行する。

(1) 国際研究集会の主催: 令和６年度に日本数学会季期研究所の援助を受けて国際会議「MSJ-SI　Probabilistic method on metric measure spaces（仮題）」を２週間開催する。また研究の進捗状況に応じて１週間の国際会議の開催も令和７、８年度に検討する。

(2)　国内研究集会の開催：研究集会「確率と幾何学」をテーマを絞って開催し、必要に応じて国外の著名な研究者を招聘して講演やチュートリアルな講義を依頼する。この研究集会は平成19年からほぼ毎年開催している。

(3)マルコフ過程とその周辺・確率論シンポジウム・幾何学シンポジウムへの参加者への助成：当該研究課題に関わる研究者の研究集会参加のための旅費と滞在費を援助する。

(4) 国際研究集会への参加：当該研究課題に関わる研究者の国際会議の参加への旅費と滞在費を助成する。

(5) 国際共同研究の促進：海外研究者の招聘を行い共同研究を行う。

(6) ポスドク・研究支援者の雇用：多くの課題に対処・新しい分野の開拓するためにポスドクや研究支援者を雇用する。

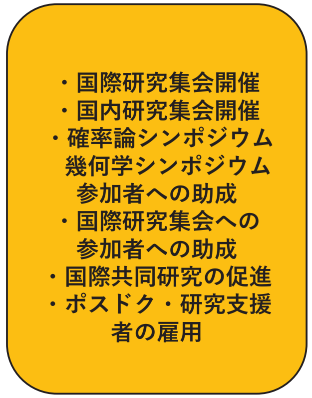

図2　研究計画のイメージ図

この研究によって何をどこまで明らかにしようとしているのか

●本研究の遂行にあたっての目標

変数型のリーマン的曲率次元空間(RCD(K(・),N)空間と呼ぶ)の定式化は既にあるが、強い制限が課されており、その制限を外し、Sobolev-Lipschitz性、これは関数の勾配ベクトル(ベクトル値導関数)の大きさが１以下ならその関数の差分が距離以下である、という性質が成立することを明らかにする。これを明らかにすることは解析的な観点から大きな応用が見込まれる。また劣リーマン多様体を包括する枠組みは準曲率次元空間(QCD空間と呼ぶ)として提唱されているが、リーマン構造は考慮されていないため、改善すべき点が多々ある。この枠組みでのリーマン的変数型準曲率次元空間(RQCD(K(・),N)空間)でも同様な結果を得ることを目標とする。ある程度の成果は研究期間内に得られる見込みである。 また 測度集中不等式の改良を考え分担者である塩谷・太田と連絡を取りながら多様体学習理論などへの応用につながる成果を目指す。 一方で分担者である櫻井と研究協力者である中国科学院教授・李向東氏と共同で重み付きリーマン多様体からのV-調和写像のLiouville 型定理の導出を明らかにする。既述の研究課題を動機付けとしてマルコフ過程の確率解析の研究を推進し、マルコフ過程の確率解析の観点から有用な結果を明らかにする。リーマン構造(内積の構造)がないときはマルコフ過程による確率解析理論は有効ではないが解析的な部分はある程度有効である。 フィンスラー多様体のような非線形空間から曲率次元空間をより一般化した概念を構築することは意義がある。重み付きローレンツフィンスラー多様体での幾何解析をそのような方向性で推し進める。

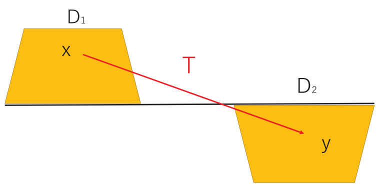

図3　最適輸送問題のイメージ図

図4　曲率の下限の違いによる最適輸送のイメージ図

ホームページ等	https://www.cis.fukuoka-u.ac.jp/~sesaki/Kickoff/kibanSindex.html