【基盤研究（S）】
大区分B

研究課題名　新時代の頂点代数の表現論

京都大学・数理解析研究所・教授

あらかわ　ともゆき
荒川　知幸

研究課題番号：　21H04993　研究者番号：40377974
研究期間：　令和3年度－令和7年度　研究経費（期間全体の直接経費）：121,300千円
キーワード：　頂点作用素代数、W代数、表現論、4D/2D双対性、4次元の超対称性場の理論

【研究の背景・目的】

頂点代数は、群や環、体のような代数系の一種である。理論物理学における二次元の共形場理論の数学的記述を与える枠組みとして、1980年代後半にBorcherdsによって導入された。無限次元リー環の代表的な例であるアフィンKac-Moody代数やVirasoro代数は頂点代数の例を与えるため、頂点代数を無限次元リー環の一般化と見なすこともできる。

さて、その起源が二次元の理論であったことから、頂点代数が他の次元の場の理論と関係することは最近まで想像されていなかった。ところが、近年さまざまなところで3次元以上の理論と頂点代数が関係することが発見されており、新しい現象として世界的に注目されている。このような理論の代表的なものの一つに、4次元のN=2超対称性を持つ場の量子論と頂点代数との関係を与える4D/2D双対性がある。

4D/2D双対性はどんな4次元のN=2超対称性場の量子論からでも、その不変量として頂点代数が定義されると主張する。さらに、そのようにして現れる頂点代数は、元の4次元のN=2超対称性場の量子論の完全不変量を与えることが期待されている。従って、これらの頂点代数を理解することは数学的のみならず物理的にも大きな意義がある。

一方、4D/2D双対性に現れる頂点代数は、これまで中心的に研究されてきた頂点代数とは異なる特徴を持つ。そこで4次元理論から現れる頂点代数を特徴付ける数学的性質の一つとして、2018年に荒川と川節は擬平滑性という概念を導入した。

4次元のN=2超対称性場の理論は極めて豊かな理論であり、従って対応する擬平滑性頂点代数も同様に豊かな構造を持つことが期待される。実際、物理学では4次元理論のヒッグス枝と対応する頂点代数の随伴多様体が同型であることを主張するBeem-Rastelli予想や、Hitchin系である4次元理論のクーロン枝と頂点代数がモジュラーテンソル圏の理論を介して関係するとする予想など、様々な興味深い予想が次々と提出されている。しかし、上記擬平滑性やクラスSカイラル代数などに関する我々の仕事を除いて、4D/2D双対性に現れる頂点代数の数学的な研究は殆ど行われていないのが現状である。

そこで本研究課題では、物理学者の予想を動機あるいは足がかりとして、擬平滑頂点代数の表現論の研究を、4D/2D双対性の立場から展開することを目的とする。

【研究の方法】

主なテーマとして、
- ・頂点代数の随伴多様体とBeem-Rastelli予想
- ・W代数の表現論とArgyres-Douglas理論
- ・クラスS頂点代数と(実)幾何学的ラングランズ対応
- ・擬平滑頂点代数の表現論とHitchin系
- ・正標数の手法を用いた擬平滑頂点代数の研究

を掲げ、これらの観点について、頂点代数の専門家である川節と山内、幾何学的表現論の専門家である疋田、物理学者である西中、雇用予定の複数のポスドク研究者、及び多数の海外共同研究者と共に、組織的に行う。また。研究交流や情報交流、議論のためのセミナーや研究集会（国内、国際）、チュートリアル的な集会などを適宜開催して研究を進める。

【期待される成果と意義】

荒川がこれまで中心的に研究を行ってきたW代数の表現論は古典的な問題から（量子）幾何学的Langlands対応まで、数多くの数学的問題と関係し、世界的な注目を浴びてきた。4次元理論から現れる頂点代数はW代数の一般化と考えられ、従って本研究課題によりW代数の表現論に関する結果を、一般の擬平滑頂点代数へと大幅に拡張することが期待できる。

また、4次元のN＝2超対称性場は非常に豊かな理論であり、特にその不変量として、ハイパーケーラー多様体であるヒッグス枝や、可積分系であるクーロン枝を持つ。4D/2D双対性の観点では、このことは代数的対象である頂点代数が、幾何学的対象であるハイパーケーラー多様体や、解析的対象である可積分系と深く関係することを意味する。実際、4次元理論のヒッグス枝と対応する頂点代数の随伴多様体が同型であることを主張するBeem-Rastelli予想が知られている。従って、本研究課題は数学の幅広い分野に波及効果を与えることが期待できる。さらに、本研究課題は理論物理学を背景とした数学の研究であり、当然結果は数学のみならず物理学の進展にも寄与することも期待できる。

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- T. Arakawa and K. Kawasetsu, Quasi-lisse vertex algebras and modular linear differential equations, In: Lie Groups, Geometry, and Representation Theory, A Tribute to the Life and Work of Bertram Kostant, Progr. Math. 326, Birkhauser, 2018.
- T. Arakawa, Chiral algebras of class S and Moore-Tachikawa symplectic varieties, arXiv:1811.01577 [math.RT].

【ホームページ等】

https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~arakawa/