科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔令和２(2020)年度 中間評価用〕

平成 30 年度採択分
令和２年３月３１日現在

新しい対称性による数論幾何的単数の創出に向けた戦略的研究

Strategic research to construct motivic units using new symmetry

課題番号：18H05233

坂内　健一（BANNAI, KENICHI）

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究の概要（４行以内）
本研究課題では新しい数論幾何的単数の構成を視野に入れて、総実代数体に付随するある種の代数トーラスに対して、プレクティック構造という新しい対称性の構造の理論を整備し、【ポリログ】と呼ばれる数論幾何的対象のプレクティック Hodge 実現や p 進実現等を具体的に記述して、総実代数体の Hecke L 関数の特殊値と結びつけることを目指す。

研　究　分　野：数学、代数学、整数論、数論幾何学

キ　ー　ワ　ー　ド：整数論、数論幾何、ポリログ、プレクティック構造、L 関数の特殊値

１．研究開始当初の背景

Beilinson 予想、玉河数予想、岩澤主予想など、代数体上定義された代数多様体の Hasse-Weil L 関数の特殊値に関する様々な予想は、米国のクレイ研究所主催のミレニアム懸賞問題の１つである Birch and Swinnerton-Dyer 予想（BSD 予想）を特別な場合として含むことなどからも分かるように、現代数学、特に数論幾何の分野において中心的な問題として位置付けられている。

代数多様体が「乗法群」と呼ばれる最も基本的な場合には、対応する Hasse-Weil L 関数が古典的な Riemann ゼータ関数となり、上記予想は様々な研究者の努力により、円分元（円単数）と呼ばれる motivic な単数を用いて証明されている。これらの予想が乗法群など限られた代数多様体の場合にしか証明されていない最大の理由は、「L 関数の特殊値」と「数論的な量」双方の情報を内在している motivic な単数が、実施的１次元の場合にしか構成されていないことに起因している。

２．研究の目的

本研究の目的は、将来的に新しい motivic な単数を創出することを視野に入れて、乗法群、楕円曲線や高次元のアーベル多様体など、様々な代数多様体に対して組織的に構成されている【ポリログ】と呼ばれる motivic な対象を研究することである。具体的な目標としては、「代数トーラス」と呼ばれる高次元の代数多様体のポリログを研究し、このポリログの Hodge 実現を具体的に決定し、総実代数体の L 関数の特殊値と関係付けることを目指す。また、以上と並行して、この場合のポリログの motive の構成方法や、p 進実現、étale 実現を具体的に決定する方法なども合わせて検討する

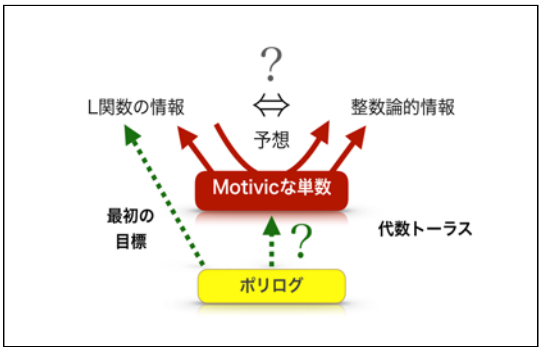

図１　研究の概念図

３．研究の方法

本研究では、整数論の専門家である山本修司氏、安田正大氏、岩澤理論の小林真一氏、motive の理論の寺杣友秀氏、p 進理論の志甫淳氏、作用素環論の勝良健史氏など、関連する分野の専門家と共に、研究を組織的に進めて行く予定である。特に、研究代表者が今

まで培ってきた高次元のポリログの Hodge 実現を具体的に記述する方法を、代数トーラスのポリログに適用して計算を進める。高次元のポリログの Hodge 実現から正しく L 関数の値を取り出すためには、Nekovář と Scholl によって提唱されたプレクティックと呼ばれる対称性の理論を展開する必要があり、まずは Hodge 実現、その後並行して motive、p 進や étale 実現の場合にプレクティックの理論を構築して行く。

４．これまでの成果

まずは混合プレクティックホッジ構造の圏の対象を、具体的なフィルター加群を用いて記述することに成功した。またこの圏の中での Ext 群を具体的な複体で与えることに成功した。これより、プレクティック Deligne-Beilinson コホモロジーを定義するための下準備ができたことになる。この成果は、下記の論文【1】にまとめた。

次に、乗法群の直積という最も単純な高次元の場合の代数トーラスに対して、ポリログの Deligne-Beilinson コホモロジー内の実現を具体的に計算することに成功した。特に、対数 Dolbeault 形式を利用し Deligne-Beilinson コホモロジーを記述する方法を整備できた。この成果は、下記の論文【2】にまとめた。

この成果を受けて、ポリログのホッジ実現を具体的に定義する研究に着手し、その過程で、総実代数体の Hecke L 関数の負の整数点の値の新谷卓郎により定義された非標準な母関数について、代数トーラスの同変コホモロジー類として解釈すると極めて自然で標準的な類を構成できることを発見した。この結果は、新谷卓郎により開かれた日本の整数論の１つの王道を継承する結果という認識である。この成果は、下記の論文【3】にまとめた。

また、上記の結果を受けて、新谷生成類の考え方をベースに、総実代数体に付随する p 進ポリログ関数の定義をした。これもやはり、総実代数体の代数トーラスの同変コホモロジー類として定義した。また、この関数の等分点での制限が、p 進 Hecke L 関数の特殊値と一致することを証明した。この成果は、有理数体の場合の Coleman の古典的な結果を総実代数体の場合に一般化するものであり、今後、今回の代数トーラスや p 進ポリログ関数が数論幾何的予想に対して有用であることを強く示唆する結果である。この成果は、下記の論文【4】にまとめた。

それ以外にも、ポリログの p 進実現を具体的に構成する受け皿としての rigid サントミックコホモロジー理論の整備、将来的にエタール実現やモチーフ的実現を考えるための下準備などを行なった。

５．今後の計画

今後は引き続き、総実代数体に付随する代数トーラスのポリログのホッジ実現を p 進実現を具体的に記述するための研究を進める。ホッジ実現については、プレクティック Delinge- Beilinson コホモロジーの定義を完成させ、この中にプレクティックポリログのホッジ実現を構成することを試みる。また、p 進についても同様に、プレクティックサントミックコホモロジーの中に、プレクティックポリログの p 進実現を構成することを試みる。具体的な計算については、p 進ポリログ関数が定義されていることから、p 進の方が取組みやすいと期待されることから、まずは、プレクティックポリログのp進実現とp進Hecke L 関数の特殊値との関係を研究する。これらが関係することを証明できれば、これは総実代数体の場合に p 進 Beilinson 予想が成り立つことを示唆する、重要な成果となることが期待される。

６．これまでの発表論文等

【1】 Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Kazuki Yamada and Shuji Yamamoto, The Hodge realization of the polylogarithm on the product of multiple groups, Math. Z.に採録決定済.

【2】 Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Shinichi Kobayashi, Kazuki Yamada, Shuji Yamamoto and Seidai Yasuda, Category of Mixed Plectic Hodge Structures, Asian J. of Math.に採録決定済.

【3】 Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Kazuki Yamada, Shuji Yamamoto, Canonical Equivariant Cohomology Classes Generating Zeta Values of Totally Real Fields, arXiv:1911.02650 [math.NT].

【4】 Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Kazuki Yamada, Shuji Yamamoto, *p*-adic Polylogarithms and *p*-adic Hecke *L*-functions for Totally Real Fields, arXiv:2003.08157 [math.NT].

7．ホームページ等

http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/