

## 【基盤研究(S)】

理工系(数物系科学)



### 研究課題名 多重ゼータの深化と新展開

九州大学・大学院数理学研究院・教授 かねこ まさのぶ  
金子 昌信

研究課題番号: 16H06336 研究者番号: 70202017

研究分野: 代数学

キーワード: 数論、数論幾何学、低次元トポロジー

#### 【研究の背景・目的】

多重ゼータ値および多重ゼータ関数は下記のような簡単な無限級数で定義される対象である。

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

変数を自然数に限ったものを多重ゼータ値、複素変数の関数とみたものを多重ゼータ関数と言い、一変数の時は古典的なリーマンゼータ関数やその自然数での値である。またより一般的な型のものも含めた値、関数の総称として、ここでは多重ゼータと呼んでいる。オイラーが現代につながる根本的な研究を行って以来の長い研究の歴史があるが、数学や物理学のいろいろな分野に登場して、様々な観点から活発な研究がなされてきたのはこの四半世紀ほどのことである。

本研究では、これまでに種々の異なる由来から予想、あるいは証明されてきた多重ゼータ値についての等式や構造について、予想はその証明に迫るとともにそれらの相互関連を明らかにし、背後に存在するであろう統一理論の確立を目指していく。また多重ゼータ関数についてはその解析数論的、および  $p$  進的な理論を整備し、多重ゼータ値の理論と相俟って次の四半世紀を潤すような新しい現象の発見に努める。さらに「多重ゼータ」として総合的に、関連する対象の理解を深化させつつ、新しい展開をめざしていく。

#### 【研究の方法】

主たるテーマとして、

- 多重ゼータ値の関係式と代数構造
  - 多重ゼータ関数の解析的、 $p$  進解析的性質の理解
  - 有限多重ゼータ値、 $p$  進多重ゼータ値、モチビック多重ゼータ値
  - 多重ポリログ
  - 多重ゼータ値と量子不変量の数論トポロジーの観点からの理解
  - 多重ベルヌーイ数
  - ガロア側面、組合せ側面からの理解
- を掲げ、これらの観点について、代表者、分担者、連携研究者、海外共同研究者相互の意思疎通をはかりながら、個人研究、共同研究を推進する。

また研究交流や情報共有、議論のためのセミナー

や研究集会(国内、国際)、チュートリアル的な集会などを適宜開催して研究を進める。

#### 【期待される成果と意義】

多重ゼータ値については、この 20 年来の研究の進展は著しいものがあるとはいえ、Broadhurst-Kreimer 予想や、どの関係式族がすべての関係を導くかに関する予想群を始めとして、未だ解決を見ない予想も多い、これらについて、どこまでを解決出来るとはっきり述べることは困難であるものの、その解決に向けた理解の深化、新しい手法の開発、また思わぬ関連の発見による。更に深い予想の提出を含めた理論的進展、などは十分見込まれる。ごく最近の有限多重ゼータ値に関連した研究の進展も期待される場所である。また、複シャッフルリー代数のように、全く異なる背景を持つ分野から同じ構造をもった対象が現れるような事象の背後にあるものについての理解が進むことが見込まれる。

多重ゼータ関数については、解析的な理論の進展はもちろんのこと、ルート系の多重ゼータ関数の研究や、最近の特異点解消多重ゼータ関数の研究が多くの示唆を与えており、その意味するところの解明と、様々な既存の結果との関連がついていくことが期待される。

多重ベルヌーイ数の組合せ解釈など、他分野への応用も期待される場所である。

#### 【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- M. Kaneko, K. Ihara and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.* vol. 142-02, pp 307--338, (2006).
- M. Kaneko, K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, *Math. Ann.* vol. 367, pp 1091-1118, (2013).

#### 【研究期間と研究経費】

平成 28 年度 - 32 年度 75,400 千円

#### 【ホームページ等】

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/kibans/>