科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔平成３０年度研究進捗評価用〕

平成２７年度採択分
平成３０年３月３日現在

格子、保型形式とモジュライ空間の総合的研究
Lattices, automorphic forms and moduli spaces

課題番号：15H05738

金銅　誠之（KONDO　SHIGEYUKI）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究の概要
近年，代数幾何学，ミラー対称性をはじめとする数理物理学，ムーンシャイン予想と関係した有限単純群論等に，格子や保型形式がしばしば登場している．本研究の主目的は，代数幾何学にとどまらずこれら周辺分野も視野に入れた広い観点に立ち，格子理論や保型形式論を用いた代数多様体の自己同型群やモジュライ空間の研究をすることである．

研　究　分　野：数物系科学，数学
キ　ー　ワ　ー　ド：代数幾何学，モジュライ空間，格子，保形形式，Ｋ３曲面

１．研究開始当初の背景
1970 年代にＫ３曲面の周期理論が確立され，そのモジュライ空間が IV 型有界対称領域の算術商であることが分かり多くの研究がなされてきた．さらにＫ３曲面の自己同型群と散在型有限単純群 Mathieu 群や Leech 格子との関係，Borcherds による IV 型有界対称領域上の保型形式論を用いたモジュライ空間の研究，Mathieu moonshine の発見など，代数幾何学の分野を超えた研究の広がりが見えてきた．

２．研究の目的
格子理論や保型形式論等を用い，Ｋ３曲面，エンリケス曲面やその高次元版である Calabi-Yau 多様体等の研究を正標数も含めて進めることが第一の目的である．一方で，Ｋ３曲面の自己同型群や幾何と Mathieu 群，Leech 格子，Mathieu moonshine などとの関係に着目した研究することが第二の目的である．

３．研究の方法
専門分野にとどまらず分野横断的なセミナーや研究集会を組織し，その中で議論を重ね新たな視点や問題意識を得ながら研究を進めていく．

４．これまでの成果
(a) 代数多様体の自己同型の研究
20 世紀初頭に Enriques は一般のエンリケス曲面の自己同型群は離散無限群であることを示すとともに，有限自己同型群を持つものの存在を問題として提出した．その後，1980 年代に複素エンリケス曲面で有限自己同型群を持つものの分類がなされたが，正標数の場合，特に標数 2 の場合は手付かずであった．研究代表者の金銅は有限自己同型群を持つエンリケス曲面の分類と構成に標数 2 で成功し，Enriques の提出した問題に決着をつけた（桂,Martin との共同研究)．

近年,力学系の研究者からも代数多様体の自己同型に関心が持たれているが,研究分担者の小木曽や研究支援者の松本は複素K3曲面，エンリケス曲面やカラビ・ヤウ多様体を含む代数多様体の自己同型の研究を行い，力学的観点（エントロピー等）から成果を得た．

K3曲面の自己同型群の研究においては Leech 格子を用いた計算の方法が知られていたが，研究分担者の島田はこれをさらに精密化し適用範囲を広げることに成功した．

複素K3曲面に作用する自己同型は正則2形式への作用が自明のときシンプレクティックと呼ばれる．研究支援者の松本は有限群スキームの作用がシンプレクティックであることの定義を与え，標数0の結果の類似を得ることに成功した．

(b) モジュライ空間の研究
偏極 K3 曲面のモジュライ空間はⅣ型有界対称領域の算術商であるが，その双有理不変量である小平次元の研究は，近年大きく進展してきた.研究分担者の馬は K3 曲面に限らず，符号が(2,n)の格子に付随したⅣ型有界対称領域の算術商の小平次元を，保形形式論を用いて決定した.

研究分担者の島田は格子理論を用いて複素エンリケス曲面上に現れる有理２重点の組み合せをすべて求めた．これは特異点に着目したエンリケス曲面のモジュライ空間上の階層構造を決定したことになる.

標数 2 のエンリケス曲面のモジュライ空間は二つの既約成分からなり，それぞれ特異エンリケス曲面と古典的エンリケス曲面に対応し，既約成分の共通部分が超特異エンリケス曲面に対応している．研究代表者の金銅は 1 次元族ではあるが古典的エンリケス曲面の超特異エンリケス曲面への特殊化の様子を明らかにした（桂との共同研究).

Igusa quartic 3-fold はジーゲル上半空間の算術商として古くから深く研究されてきたが，Ⅳ型有界対称領域の算術商でもあることが知られている．研究代表者の金銅はⅣ型有界対称領域の算術商であることに着目し，Borcherds 理論を適用することで Igusa quartic 3-fold の射影モデルを構成し，その系として，Igusa quartic 3-fold の次数 16 の有理的自己同型射の存在を見出した.

(c)数理物理および導来圏の研究
弦理論に現れる moonshine 現象には最初に発見された Mathieu moonshine とその拡張と見られる Umbral moonshine がある．研究分担者の江口はこの 2 つの moonshine は N=4 Liouville theory に埋め込むと互いに双対な理論になることを発見した（菅原との共同研究).

研究分担者の菅野は３次元 トーリック Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論においてDIM 代数の R 行列や量子可積分性を示す上で重要な T 行列を同定することに成功した． またDIM 代数の R 行列の性質を詳しく調べ， Nekrasov 分配関数の基本構成要素である Nekrasov 因子との関係を見出した．さらにDIM 代数の頂点作用素の相関関数に対する差分方程式を導くことに成功した.

研究分担者の伊山は三角圏TのVerdier商が，Tの内部に実現されるための十分条件を与え，その応用としてCohen-Macaulay表現におけるBuchweitzの定理，射影幾何学におけるOrlovの定理，団理論におけるAmiot-Guo-Kellerの定理が得られることを示した.

５．今後の計画
これまで通り，セミナーや研究集会の組織や国際研究集会への参加を通して研究を進めていく.

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

【発表論文】

(1) T. Katsura, S. Kondo, G. Martin, Classification of Enriques surfaces with finite automorphism groups in characteristic 2 (84pp), arXiv:1703.09609（投稿中）. .

(2) K. Oguiso、Pisot units, Salem numbers and higher dimensional projective manifolds with primitive automorphisms of positive entropy, to appear in International Mathematics Research Notices

(3) S. Ma, On the Kodaira dimension of orthogonal modular varieties, to appear in Inventiones Mathematicae.

(4) T. Katsura, S. Kondo, On Enriques surfaces in characteristic 2 with a finite group of automorphisms, J. Algebraic Geometry 27 (2018), 173--202.

(5) S. Ma, Finiteness of 2-reflective lattices of signature (2,n), American Journal of Mathematics 139 (2017) 513--524.

(6) I. Shimada and T. Shioda. On a smooth quartic surface containing 56 lines which is isomorphic as a K3 surface to the Fermat quartic, Manuscripta Math. 153 (2017), 279--297.

(7) T. Eguchi, Y. Sugawara, Duality in N = 4 Liouville theory and Moonshine Phenomena, PTEP 2016 (2016) no.6, 063B02

(8) T. Katsura, S. Kondo, A 1-dimensional family of Enriques surfaces in characteristic 2 covered by the supersingular K3 surface with Artin invariant 1, Pure and Applied Mathematics Quarterly, 11(2015), 683--709（E. Looijenga 教授 69 歳記念号）.

ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kondo/