科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔平成２８年度研究進捗評価用〕

平成２５年度採択分
平成２８年３月１５日現在

数理モデルにおける非線型消散・分散構造の臨界性の未開領域解明

Elucidations on uninvestigated problems related to the Criticality of nonlinear dissipative and dispersive structures in mathematical models

課題番号：25220702

小川 卓克 （Ogawa Takayoshi）
東北大学・大学院 理学研究科・教授

研究の概要
非線型発展方程式で記述される臨界問題に対して系の持つ分散性と消散性と非線型不性の拮抗による臨界性の背後に隠れた数理を探索し，未開の非線形構造の解明と臨界性の解析構造の解明を行う.

研　究　分　野：解析学・実解析、応用解析、大域解析、変分法、非線型発展方程式論
キ　ー　ワ　ー　ド：非線型分散型方程式、移流拡散方程式、大域的変分法、臨界函数不等式

１．研究開始当初の背景
多くの数理モデルは物理量の相互作用による非線型偏微分方程式で記述され、偏微分作用素による「線形構造」と、物理量の干渉に起因する「非線型構造」を含む。線形構造は消散構造(散逸構造)や分散構造に基づき、系の安定化に寄与し、物理量の干渉による非線型構造は系を非安定化に導く。これら「線型・安定」構造と「非線型・不安定」構造がつり合う問題を**「臨界問題」**と呼び本研究の中心的対象となる。

２．研究の目的
応用上も重要な多くの問題で、臨界状況が発生し、興味深い数学的現象が現れる。また臨界状況では解析学的に主要な技法である「摂動法」がそのままでは通用しないため解析学的な研究はより困難となる。本研究はこうした臨界性にまつわる問題を研究し、その背後に残されている未開領域ともいえる優臨界問題への足がかりを築くことにある。

３．研究の方法
質量保存則、運動量保存則、エネルギー、エントロピー保存則、ガリレイ変換普遍性などに加えて、数学的な等角・擬等角保存則といった構造を伴い、 それらの無限次元空間内での挙動を詳しく知ることが問題の解決に大いに寄与する。そして無限次元空間内での汎函数の幾何学的状況を把握し、拮抗する状況がどのような構造により引き起こされるかを研究する。さらに、汎用函数不等式をより精密化した臨界型函数不等式を研究することは、臨界問題に非常に有効である。そのため函数解析学による函数空間の理解と同時に、不等式の精密化に寄与する実解析学・フーリエ解析の緻密な議論(実補間理論・ウェーブレット理論)を援用し、様々な臨界型函数不等式を確立することがこうした問題を取り扱う

４．これまでの成果
(4-1)空間 2 次元で 2 次の非線型性を有するラマン分光モデルは、質量係数の値に応じて、単独 2 次の非線型シュレディンガー方程式の解の持つ漸近挙動をすべて合わせ持つ。空間 2 次元で 2 次の非線形性は非線型シュレディンガー方程式の「非線型長距離散乱」と「短距離散乱」の境目の臨界指数(Barabu-Ozawa 臨界)であって質量共鳴の場合に非線型散乱が発生する。ここでは質量共鳴条件下で既知の分類に類別されないチャージが遷移する漸近挙動が発生することを証明した([5])。これは連立系独特のものである。また、時刻零近傍での解の適切性を保証するソボレフスケールが、質量非共鳴、質量相殺，質量共鳴の各状況に応じて変動し、それぞれ単独の非線型シュレディンガー方程式の持つ適切性の臨界空間と対応がつくことを証明した。これらの結果の準備段階として空間 2 次元 2 次の非線型項を持つ単独非線型シュレディンガー方程式の初期値問題に対する時間局所非適切性の研究を実施した([4])。その際にウエーブレット変換の技法を用いたモデュレーション空間における適切性の技法を駆使して、2 次元に固有の特

異性を捉えることが基礎をなしている。
(4-2)R. Danchin らは Fujita-Kato の手法を取り入れ、圧縮性の粘性流体の可解性を臨界ベゾフ空間において論じたが，ポアソン系との連立などいくつかの関連の問題に対してはそうした手法が完全に展開可能とはいえなかった。系の双曲型構造を制御するために放物型消散構造から最大の正則性を引き出す点にある。研究協力者の清水扇丈氏(京大)と共に変数係数の放物型方程式の初期値問題に対する時間端点臨界最大正則性を Danchin らの方法とは本質的に異なる(基本解とリトルウッド-ペーリー単位分解の持つ概直交性に基づく)方法で研究し、変数係数の問題に拡張して証明した([2])。その副産物として、(i) 時間大域最大正則性を示し(ii) 2 階の放物型方程式に対して初期条件が 3 階以上のいわば優最大正則性の評価を示し，さらに (iii) 端点最大正則性としては最良と思われる係数函数に対する正則性条件を得た。これらの結果はそのまま圧縮性ナビエ・ストークス方程式の可解性や関連する諸問題に応用可能である。
(4-3) 移流拡散方程式系は、放物型・双曲型・楕円形といった偏微分方程式の基本となる構造を内包し、スケール不変性も併せ持つ(i)半導体の古典モデル(ii)生物化学における粘菌走化性モデル(iii)重力下における天体・ガスの挙動モデルなど、物理スケールの大きく異なる状況で現れる普遍的モデルである。空間 2 次元で Fujita(質量臨界)の意味でもソボレフの意味でも「臨界」となり(二重臨界)、とりわけ初期総質量が臨界閾値である 8π を上回ると解が有限時刻で爆発し、下回ると時間大域的に安定に存在することが知られていたが，閾値である 8π の場合は、一般的な結果が得られていなかった。永井敏隆氏と共同で、初期総質量が臨界値 8π そのものでも、時間大域的に解が存在することをエントロピー汎函数を有界変動函数の空間でとらえ直すことにより証明した([3])。他方、主要部を退化させた移流拡散方程式は圧縮性ナビエ・ストークス・ポアッソン方程式の緩和時間零極限から得られ、退化指数は気体の断熱定数に応じて真に 1 より大きな値を取り得る。この場合得られる移流拡散方程式はポーラスメディア型の退化放物型問題となり、ソボレフ臨界指数の場合と類似の可解性の分類が質量臨界指数とソボレフ臨界指数の間の場合においても、時間大域解の存在と有限時刻での解の爆発の境目の値が定常問題の解により厳密に分類可能であることを示した。さらに空間 2 次元で質量-ソボレフ臨界となる半線形の移流拡散方程式は空間 3 次元以上ではソボレフの意味での優臨界となり、3 次元ナビエ・ストークス方程式の如く可解性などの問題が難しくなる。ここでは 3 次元以上の移流拡散方程式の初期値問題の解の有限時刻での爆発と、時間大域的非一様性の問題を考察し系が元々有している、質量とエントロピー保存則に起因するビリアル法則により、2 次のモーメントの有界性を仮定すること無く、3 次元以上の移流拡散方程式の解が時間大域的に不安定となり、球対称あるいは 2 次以上の有限モーメントを持つ場合に優眼時刻で解が爆発することを、また 2 次モーメントが有限では無い非球対称の場合でも時間大域解が有界にとどまらないことを示した([1])。これらの成果は L log L 型のエントロピー汎函数の制御をシャノンの不等式を一般化し精密化して適用することによりこれらの成果を得ることができた. ここで得られた一般化シャノンの不等式はグロスの対数ソボレフ型不等式の双対の形態をしており、双方を合わせることによりハイゼンベルグの不確定性原理の不等式を再現する。

５．今後の計画

ラマン分光モデルと高次分散型方程式の漸近挙動の関係、移流拡散方程式系の不安定指定と解の凝集、あるいは圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解の漸近挙動や臨界可解性について臨界構造を明らかにする研究を行う。2017 年度には国際研究集会を開催して臨界構造に関する総合報告を行い移流拡散方程式系と圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式、さらには分散型方程式系の臨界構造の相関について成果を発表する予定である。

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

[1] T. Ogawa, Y. Wakui, Non-uniform bound and finite time blow up for solutions to a drift-diffusion equation in higher dimensions, Anal. Appl.,　14 (2016), 145-183. (査読有)

[2] T. Ogawa, S. Shimizu, End-point maximal L^1 regularity for the Cauchy problem to a parabolic equation with variable coefficients, Math. Ann., (2015) published on line (査読有)

[3] T. Nagai, T. Ogawa, Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2, Funkcial. Ekvac. 59, No. 2 (2016), 67-112. (査読有)

[4] T. Iwabuchi, T.Ogawa,Ill-posedness for nonlinear Schrödinger equation with quadratic nonlinearity in low dimensions,　Trans. Ameri. Math. Soc., 367 (2015), 2613-2630. (査読有)

[5] T. Ogawa, K. Uriya, Final state problem for a quadratic nonlinear Schrodinger system in two space dimensions with mass resonance,J. Differential Equations, 258 (2015), 483-503.

[6] 池田 正弘（研究支援者）日本数学会建部兼弘奨励賞 2015 年 9 月.

[7] 石毛 和弘（研究分担者）日本数学会 第 13 回解析学賞 2014 年 9 月.
業績題目：「線形および非線形熱方程式の解の定性的解析」

ホームページ等
http://ogawa-kibans.math.tohoku.ac.jp