科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔平成２８年度研究進捗評価用〕

平成２５年度採択分
平成２８年３月１０日現在

代数多様体のモジュライ空間と自己射の数理
Moduli spaces of algebraic varieties and self-morphisms

課題番号：25220701
向井　茂（Mukai Shigeru）
京都大学・数理解析研究所・教授

研究の概要　自己写像の観点を取り入れることによって、代数多様体とモジュライの研究のさらなる発展を目指す。そのために、複素力学系や幾何学的表現論の専門家を分担者に入れて、隣接分野と問題意識や研究手法の共有をはかっていく。主な研究対象は、エンリケス曲面（より一般には、対合付 K3 曲面）やカラビ・ヤオ多様体、そして、それらの自己同型（群）とモジュライである。博士研究員を雇用して、次世代研究者の発掘・育成の一助としたい。

研　究　分　野：数学
キ　ー　ワ　ー　ド：代数幾何学、複素幾何、表現論、複素解析、数論幾何学

１．研究開始当初の背景

代数幾何学は多くの固有の方法や問題をもっているが、他の分野への応用にも目覚ましいものがあって、それは現在も続いている。応用のされ方としては、モジュライに関するものが多いが、近年は自己射(写像)に関連するものも増えてきている。特に、複素力学系における隣接分野では、自己同型のエントロピーやクレモナ群等の研究において代数幾何学へのフィードバックを与える結果が得られている。

２．研究の目的

代数多様体とモジュライという伝統的な問題群に対して、自己射の観点を取り入れることによって、また、複素力学系や幾何学的表現論等における隣接分野と問題意識や研究手法の共有をはかることによって、研究のさらなる発展を目指す。

３．研究の方法

a）代数多様体の自己射やモジュライをエンリケス曲面やカラビ・ヤオ多様体を中心に研究する。

b）代数多様体の自己射の力学系・エルゴード理論的な性質、特に、不変集合の構造や不変測度の性質などを研究する。

c）クラスター代数の幾何学的な理解を深める。

４．これまでの成果

向井（代表者）と大橋（連携研究者）は共同してエンリケス曲面の自己同型群を研究した。特に、無限位数であるにも拘らず、自己同型群が具体的に記述できるエンリケス曲面の発見に精力を注ぎ、そのようなエンリケス曲面の１次元族を発見できた[1]。また、エンリケス曲面に作用する有限群の研究も進め、Mathieu 的に作用できるものを分類した。この有限群の中に 6 次交代群の出現することが著しい[2]。

現在は、他のエンリケス曲面に対して無限自己同型群の具体的な記述を求めつつある。一つは、正 8 面体的な種数 2 曲線の Jacobian クンマー曲面を K3 被覆とするもので、自己同型群は 8 個の対合（位数 2 の元）の自由積を指数 192 の正規部分群として含むことを示した。

向井は、80 年代に Nikulin が定義した、エンリケス曲面に対するルート型や 2 を法とするルート型を再定義した。前者は局所系係数のホッジ構造を用いるもので、Allcock が格子論的に発見した周期に自然な意味付けを与えている。後者は 2 元体上のベクトル空間上の 2 次形式で、強力な道具であるが、定義には細心の注意を要する。

小木曽は正のエントロピーを持ちかつ primitive な正則自己同型を許容する 3 次元有理多様体と 3 次元カラビ・ヤウ多様体の最初の例の構成に成功した(Truong 氏と共同)。また、ある種の 3 次元トーラス商の単有理性に関する Ueno-Campana 予想に肯定的解決を与えた。また、非特異 5 次 Calabi-Yau 3-fold

の自己同型群を分類し、 極大なものをすべて明示的な形で記述した（Xun Yu 氏と共同）。

吉川は川口や向井と共同で、Borcherds のΦ関数に対する代数的表示を得た。また、馬（連携研究者）との共同研究において、吉川が2004年に導入した対合付きK3曲面の解析的捩率不変量τを、モジュライ空間上の関数として決定した。対合付き K3 曲面は 75 種類の変形型よりなり、夫々が直交型モジュラー多様体をモジュライ空間にもつ。解析的捩率不変量は明示的なBorcherds積とジーゲル保型形式の積のピーターソン・ノルムで与えられ、結果的に全て楕円モジュラー的である事が示された。また、不変量τから Borcherds 積を単独で取り出す方法を見出した。

中島は、4次元ユークリッド空間上のインスタントンのモジュライ空間の交叉コホモロジー群がW代数の表現の構造をもつことを示した（Braveman、Finkelbergと共同）。また、3次元 N = 4 ゲージ理論のクーロン枝の、アファイン多様体としての厳密な定義を与えた。これに類似した 4 次元 N = 2 超対称性ゲージ理論のクーロン枝は、Hitchin の考察したヒッグス束のモジュライ空間になることが知られており、特に Gaiotto-Moore-Neitzke の物理学者の研究により、クラスター代数と密接な関わりがあることが分かっている。4 次元のクーロン枝の数学的に厳密な定義は、現状では難しいと思われるので、それにより近いと思われる、K理論版のクーロン枝の定義を考察した。これは、3次元のクーロン枝の定義において使われている、同変ホモロジー群の部分をすべて同変K群に置き換えて定義されるものである。定義は well-defined で、主な性質が同様に成り立つ。さらに、具体的な例を研究し、箙ゲージ理論と呼ばれるクラスについて、有限ADE 型であれば、trigonometric Zastava 空間とよばれているものになっていることを確かめた。Finkelberg-Kuznetsov-Rybnikov-Dobrovolska により、この空間はクラスター構造を持つことが予想されているので、一般的に K理論版のクーロン枝がクラスター造を持つと期待することは、自然であると思われる。

５．今後の計画

小木曽が中心となって、2016 年 7 月に数理解析研究所において、国際研究集会「代数多様体の有理性と双有理変換群」を 4 日間開催する。海外からは、C. Voisin や N. Shepherd-Barron を筆頭に 10 名近くが参加する予定。

再定義したルート型や 2 を法とするルート型を用いて、エンリケス曲面の自己同型群をさらに詳しく調べる。例えば、[1]が implicit に仄めかしている予想「エンリケス曲面の自己同型群のヴァーチャル・コホモロジー次元は楕円ペンシルの Mordell-Weil 階数の最小値に一致するか」がどれくらい正しいのかを検証する。

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

[1] S. Mukai and H. Ohashi, The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, "Recent Advances in Algebraic Geometry" in the LMS Lecture Notes Series, 417, 2015.

[2] S. Mukai and H. Ohashi, Finite groups of automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M_12, 2015. arXiv1410.7535.

[3] H. Nakajima, Cluster algebras and singular supports of perverse sheaves, in "Advances in Representation Theory of Algebras", EMS Series of Congress Reports, 2014, 211-230.

[4] S. Cantat, K. Oguiso, Birational automorphism groups and the movable cone theorem for Calabi-Yau manifolds of Wehler type via universal Coxeter groups, American J. Math. 137 (2015) 1013--1044.

[5] K. Oguiso, T. T. Truong, Salem numbers in dynamics on Kaehler threefolds and complex tori, Math. Z., (2014), 278.

小木曽はソウルで開催された国際数学者会議（2014 年 8 月）の「代数幾何学と複素幾何」のセッションにおいて招待講演を行った。

ホームページ等
基盤(S)
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/mukai/indexj.html

2013 年度研究集会:モジュライ空間と自己写像, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~pioggia/2014Mar.html

ポスドク(M. Wandel) による 2015 年度研究集会：和欧シンプレクテック多様体とモジュライ空間, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~wandel/waou/

2015 年度研究集会：高次元代数幾何とその周辺, http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/1602kobe-kyoto/index.html