科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔研究進捗評価用〕

平成２４年度採択分
平成２７年３月２３日現在

現代解析学と計算科学の手法による乱流の数学的論理の構築

Mathematical Theory of turbulence by the method of modern analysis and computational science

課題番号：24224003

小薗　英雄（KOZONO　HIDEO）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究の概要
大型計算機の飛躍的な性能向上に伴い、乱流の解明に計算科学的方法が広く使われつつある。しかし、乱流の問題の根幹である空間のスケール無限大、粘性消滅、エネルギー減衰といった極限操作対しては、非線形偏微分方程式の解法における現代解析学の方法が威力を発揮する。本研究では現代解析学の手法により複雑な流動現象の解明し乱流の数学的理論を構築する

研　　究　　分　　野：偏微分方程式論、非線形解析学

キ　ー　ワ　ー　ド：ナビエ・ストークス方程式、調和解析学、関数解析学、大域的適切性

１．研究開始当初の背景

非線形発展方程式における主要な研究テーマとして、解の時間無限大における漸近挙動が上げられる。研究代表者はナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰について先駆的な研究を行ってきた。これは、元来、ナビエ・ストークス方程式の数学的研究の始祖であるLerayによって提唱された有名な問題である。最近、数学解析における解の漸近指数は、数値シミュレーションによる計算結果と完全に一致することが明らかになった。

２．研究の目的

大型計算機の飛躍的な性能向上に伴い、乱流の解明に計算科学的方法が広く使われつつある。しかし、乱流の問題の根幹にかかわる空間のスケール無限大、粘性消滅、エネルギー減衰といった極限操作に対しては、非線形偏微分方程式の解法における現代解析学の方法が威力を発揮する。実際、調和解析学による非線形偏微分方程式の解の漸近展開の方法は、大規模な有限計算の極限状態を予測可能とし、乱流理論や乱流縮約モデルの構築に寄与することが期待できる。本研究では、現代解析学の手法を用いて複雑な流動現象の解明、およびその予測信頼性向上に貢献すべく乱流の数学的理論を構築する。

３．研究の方法

本研究は、数学解析研究班と流体力学研究班の２つの研究グループの連携によって推進する。数学解析研究グループでは、非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学を用いてナビエ・ストークス方程式および簡素化された方程式の解の性質を、数学的厳密理論および数値実験双方の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、大規模な流れを記述する適切なモデルの構築行うと同時に、乱流の普遍原理に解明に数学的な確証を与える。流体力学グループでは、主として計算科学的方法、とくに大規模直接数値シミュレーション（Direct Numerical Simulation=DNS）による乱流現象の解明、及び、数理物理的根拠を持ち恣意的調節パラメータを含まない情報縮約手法の開発に挑戦する。

４．これまでの成果

１．流体力学の基礎方程式

(i) 回転する障害物の周りの定常 Navier-Stokes 方程式の解の存在と一意性

(ii) 外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の一意性とエネルギー不等式

(iii) 多重連結領域における Leray の不等式と制限された流量条件の同値性

(iv) 一般化された流量条件下における定常 Navier-Stokes 方程式の大きな弱解の安定性

(v)回転座系における Navier-Stokes 方程式の周期解の存在とその漸近安定性

(vi) 無限層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の平行流型定常解の安定性および不安定性

(vii) 周期的層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動

(viii) 無限層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の平行流型時間周期解の線形化安定性解析

(ix) 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間周期解の存在と安定性
２．調和解析学的方法論の開発
(i) Banach 空間における一般化された Lax-Milgram の定理と楕円型境界値問題への応用
(ii) ウェーブレット解析に基づく乱流モデルの開発
(iii) ソボレフ空間における非線形偏微分方程式の初期値問題の研究
(iv) 重み付き Moser-Trudinger 不等式の構成と指数関数型非線形項を持つ偏微分方程式への応用
(v) ストリッカーツ評価の拡張、および、可微分性の低い非線形項を持つシュレディンガー方程式の初期値問題の研究
３．関連する非線形偏微分方程式
・空間３次元における非線型波動方程式に対する外部問題の解の最大存在時刻の評価の精密化
４．乱流のもつ普遍的法則性
(i) 小さな渦の統計的普遍性-- -4/5 則
(ii) せん断乱流における統計的普遍性--線型応答理論
(iii) 世界最大規模の乱流 DNS による乱流普遍則の探索
(iv) 乱流微細渦構造の慣性領域への影響の評価
(v) パッシブスカラー乱流の減衰
５．情報縮約手法、予測可能性、信頼性評価
(i) 複雑境界乱流の数値計算
(ii) 乱流の予測可能性

５．今後の計画

非線形解析学と流体力学の２つの研究グループの有機的連携の基に研究を推進する。
達成目標を定め、研究の進捗状況を判断する。
(I) 調和解析学、特異極限解析と有限性の影響評価
(i) 無限領域における漸近解析と有限な計算領域の数値解析による領域の有限性の影響評価
(ii) 要素的な渦の特異点挙動の解析と解像度の有限性の影響評価
(II) 大規模流れの数理解析
(i) 座標軸の回転と障害物の回転によって生じる流れを記述する方程式系の解析
(ii)調和解析学の手法による高精度計算と新アルゴリズム開発
(III) 乱流のもつ普遍的法則性の解明
(i) 規範的な乱流場の世界最大規模の直接数値計算と非線形偏微分方程式の解の特異点解析による小さなスケールの普遍性解明
(ii)無限領域における乱流エネルギーの時間減衰の漸近指数を作用素の分数冪と半群理論を用いての解析、および DNS による比較検証
III-a 小スケールおける普遍的統計法則
III-b 大スケールにおける普遍性
(IV) 情報縮約手法の開発、予測可能性と信頼性の評価
(I)～(III)の知見および乱流のスペクトル的統計理論を手がかりとして、LES (Large Eddy Simulation＝小さな渦を適当にモデル化し、大きな渦を解く方法) およびリトルウッド・ペリー分解 (波数空間における２進分解基底による関数の単位の分解) によるモデル開発

６．これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

1. Farwig, R., Kozono, H., Weak solutions of the Navier-Stokes equations with non-zero boundary values in an exterior domain satisfying the strong energy inequality, J. Differential Equations 256, 2633--2658, (2014).
2. Heck, H., Kim, H., Kozono, H., Weak solutions of the stationary Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid past an obstacle., Math. Ann. 356, 653--681(2013).
3. Kozono, H., Yanagisawa, T., Globalcompensated compactness theorem for general differential operators of first order, Arch. Rational. Mech. Anal. 207, 879--905, (2013).
4. Kozono, H., Yanagisawa, T., Generalized Lax-Milgram theorem in Banach spaces and its application to the elliptic system of boundary value problems, Manuscripta Math. 141, 637--662, (2013).
5. Kozono, H., Ushikoshi, E., Hadamard variational formula for the Green's function of the boundary value problem on the Stokes equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 208, 1005--1055, (2013).
6. Brezina, J., Kagei, Y., Spectral properties of the linearized compressible Navier- Stokes equation around time periodic parallel flow, J. Differential Equations, 255, 1132--1195, (2013).
7. Farwig, R., Kozono, H., Yanagisawa, T., Leray's inequality in general multi connected domains in R^n, Math. Ann. 354, 137--145, (2012).
8. Kim, H., Kozono, H., On the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains. J. Math. Anal. Appl. 395, 486--495, (2012).

・小薗英雄 2014 年度日本数学会賞秋季賞
業績題目：非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の定常・非定常流の調和解析的研究
・隠居良行 2012 年度日本数学会解析学賞
業績題目：圧縮性粘性流体の平行流の安定性解析」
ホームページ等
http://www.math.sci.waseda.ac.jp/math/