科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔研究進捗評価用〕

平成 24 年度採択分
平成２７年４月１日現在

代数幾何と可積分系の融合と深化
Development and Interactions between Algebraic Geometry and Integrable Systems

課題番号: 24224001

齋藤 政彦（SAITO MASAHIKO）
神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究の概要　本研究の目的は，種種の可積分系に表れる相空間を安定放物接続のモジュライ理論を用いて数学的に定式化しモノドロミー保存変形の幾何学を確立する事である．　さらにその相空間の構造を，高次元双有理幾何学や様々な代数幾何学的方法によって明らかにし，可積分系と代数幾何を融合した精密な理論を構築する．また，各量子不変量のモジュライ空間による理解，相関関数に関するミラー対称性等の予想の数学的背景を明らかにする．

研　究　分　野：数物系科学
キ　ー　ワ　ー　ド：代数幾何，可積分系，微分幾何，パンルヴェ方程式，ミラー対称性

１．研究開始当初の背景

パンルヴェ方程式の相空間の研究から，接続のモノドロミー保存変形が代数幾何学的なモジュライ理論で精密に記述された．不確定特異点の場合への拡張や，標準座標の理論の確立が期待されている．高次元代数幾何の森理論や極小モデル理論の進展により，可積分系の相空間の精密な構造の解析も可能になりつつある．　数理物理に源をもつ，ミラー対称性や量子不変量に関する予想に関して，数学的基礎づけも進み．更なる理論の深化が期待される．

２．研究の目的

本研究の目的は，可積分系の相空間をモジュライ理論により定式化し，モノドロミー保存変形の幾何学を確立する事である．さらに相空間の構造を森理論や極小モデル理論などの高次元代数幾何学的手法によって明らかにし，可積分系と代数幾何を融合した精密な理論を構築する．また，種々の量子不変量のモジュライ空間による理解，相関関数に関するミラー対称性等の予想の数学的背景を明らかにする．

３．研究の方法

研究組織に属する個々の研究者が各自の問題意識のもとで研究を進めつつ，分野内・分野横断のセミナー，研究集会などを組織し，代数幾何学と可積分系の最新の結果の相互理解を深める事に重点を置き研究を進めている．併せて，海外の当該分野の専門家と共同研究し，研究を推進する．

４．これまでの成果

現在までの成果を次の３つの研究課題ごとに分けて述べる．

(a) モノドロミー保存変形の幾何学の確立．
(b) 高次元双有理幾何学の研究と可積分系への応用．
(c) 種種の量子不変量とモジュライ空間，ミラー対称性の数学的理解．

研究課題(a)については，確定特異点の場合に稲場・岩崎・齋藤，稲場の結果で確立していたが，さらにスペクトル型を固定した時の理論（論文準備中），不分岐の不確定特異点の場合(2013)は，稲場・齋藤により確立された．分岐する不確定特異点の場合にモジュライ空間の定式化，一般化されたリーマン・ヒルベルト対応の記述も含めて研究進行中である．望月は混合ツイスターＤ加群の理論を整備した．齋藤と S.Szabo は，接続や Higgs 束のモジュライ空間に対し，見かけの特異点による標準座標の一般理論を構築した．　近日論文として発表する予定である．F. Loray, C. Simpson と齋藤の共同研究により，パンルヴェ VI 型方程式，ガルニエ系に関わる接続のモジュライ空間上に２方向のラグランジュファイブレーションが存在し，それが横断である事が示された．幾何学的ラングランズ対応の理解につながる可能性がある．山田・野海は，パデ近似による E_8 型の楕円差分パンルヴェ方程式のより簡単なラックス形式を得た．山田は名古屋と量子パンルヴェ方程式のラックス形式を構成した．
研究課題(b)については，森は Prokhorov と端末的３次元射影多様体の端収縮射の分類を

行った．藤野は，コンパクトケーラー多様体の標準環が有限生成であるという基本的な結果を得た．並河は，symplectic variety に関連したポアソン変形と双有理幾何について研究した．向井は，有限単純群の作用する Enriques 曲面について精密な結果を得た．松下は，ラグランジュアンファイブレーションを持つ既約シンプレクティック多様体の研究を行った．戸田は Bridgeland 安定性条件と極小モデルとの関連を明らかにした．
研究課題(C)については，小野は，深谷，Oh，太田との共同研究により，倉西構造と仮想基本類の理論を用いて量子コホモロジーの基礎理論を整備した．中島は，インスタントンのモジュライ空間の交叉コホモロジー群が W 代数の表現の構造を持つ事を示した．細野は，導来圏同値であるが双有理同値でないカラビ・ヤウ多様体について研究した．代数多様体の連接層の導来圏の研究も大きく進展した．吉岡，阿部，入谷，石井，戸田らがそれぞれの観点から研究を行い，大きな成果を上げた．入谷は，高種数のグロモフ・ウィッテン理論における Fock 層の理論の基礎付けを行い，トーリック軌道体に対するミラー定理を証明した．望月は，混合ツイスターD 加群の理論を用いて，弱 Fano トーリック多様体のミラー対称性に関する Givental 同型から局所ミラー対称性に付随する量子 D 加群の同型が得られる事を見出した．
研究者相互の情報交換の為，ホームページを整備し，研究集会セミナー情報を MathCalendar に掲示している．（下記参照）

国際研究集会も数多く主催・共催している．

５．今後の計画
研究課題(a)に不分岐の不確定特異点に関する基礎理論の構築を進める．また，見かけの特異点の理論を用いて，接続の具体的な普遍族の構成を行う．
研究課題(b)に関して，高次元代数幾何の研究を進めるとともに，接続と Higgs 束のモジュライ空間のラグランジュアンファイブレーションの構造を解析する．
研究課題(c)については，現在までの研究を続けるとともに，量子不変量や共形場の理論との関係について新しい理論が報告されているが，これらを検討して，理論を構築したい．H27 年度には，箙理論についてのサマースクールを開催する予定である．

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

F. Loray and M.-H. Saito, Lagrangian Fibrations in Duality on Moduli Spaces of Rank 2 Logarithmic Connections Over the Projective Line, Int. Math. Res. Not. No.4, 995-1043, 2015,

H.Nagoya, Y. Yamada, Symmetries of quantum Lax equations for the Painleve equations, Ann. Henri Poincare, 15, 313-344, 2014

T. Mochizuki, Harmonic bundles and Toda lattices with opposite sign II, Comm. Math. Phys., 328 (2014), no. 3, 1159--1198

Michi-aki Inaba, M-H. Saito, Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve, Kyoto J. of Math.,53 no. 2,2013,433-482.

K.Yoshioka, Perverse coherent sheaves and Fourier-Mukai transforms on surfaces I, Kyoto J. Math. No.53, 2013, 261-34

T. Mochizuki, ``Mixed twistor D-modules”, Lec. Notes in Math. Springer Verlag, to appear.

国際研究集会の報告集：

O.Fujino, S.Kondo, A.Moriwaki, M.-H. Saito, K.Yoshioka. (Eds.), Proceedings of the 6th MSJ-SI, “Development of Moduli theory”, Advanced Studies in Pure Math., Vol. 69, to appear in 2015.

ホームページ等

http://www2. kobe-u. ac. jp/~mhsaito/ftop. html