平成２３年度採択分
平成２６年３月２０日現在

幾何学的モジュライ理論の深化と理論的応用

Study of Geometric Moduli Theories and Theoretical Applications

中村　郁（NAKAMURA　IKU）

北海道大学・名誉教授

研究の概要

幾何学的対象の変化の中でもっとも重要なものは、「自然で安定な極限」である。自然で安定な極限をすべて集めて、モジュライ空間のコンパクト化を構成すると、大域的不変量を定義できる。その結果、さまざまな数学的現象を理解する手段を得る。安定性を基点にモジュライの幾何を研究し、幾何学の幅広い分野と、微分方程式、物理学、社会科学への応用の可能性を探る。

研　　究　　分　　野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュライ、安定性、ゼータ関数、ミラー対称性、超平面配置、パンルベ方程式

１．研究開始当初の背景

同種類の幾何学的対象は、一斉にパラメーターを用いて表示されることが多い。このパラメーターの定める空間をモジュライ空間と呼ぶ。幾何学的対象のあらゆる変化の中でもっとも重要なものは、「自然で安定な極限」である。自然で安定な極限をすべて集めた空間をモジュライ空間のコンパクト化と呼ぶ。コンパクト化を求めると、固有の分野を超えて、ときに数学の中にとどまらない、さまざまな理論的応用がある

２．研究の目的

モジュライ空間の安定な極限によるコンパクト化を構成し、関連する分野に応用する。

(1) アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化などの安定性を用いた解明、保型形式、ゼータ関数、サイクルの研究
(2) 安定な放物接続のモジュライ空間を用いて、パンルヴェ方程式を研究する
(3) 安定な写像のモジュライ空間を用いて量子コホモロジー理論やミラー対称性理論（物理学への応用）を研究する。
(4) 超平面配置理論を深化させ社会科学へ応用する。

３．研究の方法

安定な幾何学的対象を中心に、Mumford やラグランジュ・フレア理論を適用して研究する。また、超平面配置の研究を通して、超幾何級数、原始積分の理論を改良深化させる。

４．これまでの成果

(1) 中村郁はアーベル多様体の自然なコンパクト化を構成した。1999 年、2010 年に構成した第一、第二のコンパクト化について、2010 年には未完成の部分、完全に一般のレベルでの第二のコンパクト化 SQ2(g,d)を構成した。さらに、コンパクト化も全体として自然なよい構造を持つことなどを証明した。また、従来の理論を大幅に変更、読みやすい理論に書き改め、投稿中。
(2) 中村郁はアーベル多様体のモジュライ空間でコンパクトな既知のものとの関係を明らかにした。アーベル多様体のモジュライ空間でコンパクトなものは、上の第一、第二のコンパクト化のほかには、アレクセーエフが構成したものだけである（その主要成分を Al(g,d)とする）。中村郁は SQ2(g,d)と Al(g,d)の関係を明らかにした。SQ2(g,1)と Al(g,1)は一致することを証明した。d が一般の場合には、(d-1)次元の射影空間を P とすると、SQ2(g,d)と P の積から Al(g,d)への有理的有限射が存在することを示し、この射を詳細に記述した。この結果、SQ2(g,1)は無駄なパラメーターのない最小の、唯一のコンパクト化である。
(3) 翁林はそれぞれ半安定ベクトル束のモジュライ空間上の積分として、有限体上の代数曲線に対して、純非可換ゼータ関数と代数群ゼータ関数を定義、基

本的な性質を調べた。ほかに類似の積分を定義、モチーフ的に一般化した漸化式を与えた。また、モチーフ的なオイラー積とモチーフ的なアデール測度を導入、基本的な性質を調べ、理論的な基礎付けを与えた。

(4)　翁林はザギアとの共著で、楕円曲線の純非可換ゼータ関数に対してリーマン予想を証明した。また翁は、ザギアら３人と共同で階数 n のモチーフ的ゼータ関数は、代数曲線に付随する代数群 SL(n)のモチーフ的ゼータ関数と一致することを証明した。

(5)　岩崎はパンルヴェ第VI方程式の不変部分集合、周期解、代数関数解を決定した。モノドロミー写像で不変な既約コンパクト部分集合は，孤立周期解（0 次元）か，超幾何関数解のなすリッカチ曲線(1 次元)に限ること、周期解はリッカチ解に限ることを示した。

(6) 岩崎-岡田脩はパンルヴェ第 I 方程式を軌道体ハミルトン構造によって特徴づけた。　第 I 型から第 VI 型までの全てのパンルヴェ方程式の相空間は、代数曲面により構成され(岡本 1970 年代)、相空間のハミルトン構造がパンルヴェ方程式を一意的に特徴づける（高野 1995 頃)。　岩崎-岡田は、未解決だった第 I 方程式に対してこの問題を解決。投稿中。

(7) 小野は３人の共同研究者とともに、Lagrange 部分多様体の フレア 理論を構成し、コンパクトなトーリックケーラー多様体の 運動量写像の逆像に対して適用し、symplectic 幾何的な応用やホモロジー的ミラー対称性に関わる結果を得た。例えば、複素射影平面の２点 blow-up に適当なケーラー形式を与え、ハミルトン同相写像によって自分自身と交わらないようにできない運動量写像の ラグランジュ・トーラスファイバー が連続的に現れることなどを示した。

(8)小野-ブーパルは複素２次元の孤立商特異点のリンクの極小 symplectic 充填の symplectic 変形同値類を分類した。

(9) 寺尾は４人の共同研究者とともにシャピロら４人(SSKM)の双対分割定理を、任意のイデアル配置に拡張した。(SSKM) の双対分割定理は、ルート系の高さ分布とワイル群の指数とが双対であることを主張する有名な結果である。寺尾たちの結果は以下のとおりである。ワイル群のルートを、高さが広義の単調増加的に並べると，登場する超平面配置がすべて自由配置であり，ルートの高さ分布と指数とが双対になる。この結果は米国のソマースとティモチコによる"予想 2"に他ならないことがのちに判明した。

５．今後の計画

中村郁は北大数論幾何学セミナーを中心に、朝倉、原下、桂田らの連携研究者などとの研究連絡を継続して、アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化の研究を推し進める。また、国際研究集会を開催して研究連絡、成果の公表に努力する。翁林は、菅原（九州大学）と数論的多様体のアデール的コホモロジー理論を進める一方で、一般の代数曲線に対するリーマン予想をめざして研究を進める。寺尾はソマースとティモチコによる未解決予想に取り組みながら、超平面配置の研究を進める。岩崎、小野やほかの連携研究者も、従来と同じ方向で研究を継続する。

６．これまでの発表論文等(受賞等も含む)

(1) K. Iwasaki, On algebraic solutions to Painleve VI, RIMS Kokyuroku Bessatsu B37 (2013), 49--67, 査読有,

(2) K. Iwasaki and T. Uehara, Isolated periodic solutions to Painleve VI equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu B37 (2013), 69--79, 査読有,

(3) K.Ono and M. Bhupal, Symplectic fillings of links of quotient surface singularities, Nagoya Math. Jour. 207 (2012), 1-45. 査読有 DOI 10.1215 /00277630-1630014

(4) H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Arrangements stable under the Coxeter groups, Proceedings of "Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology" in Pisa, (2012) 327-354 査読有

(5) I.Nakamura, Moduli of Abelian Varieties and their compactifications, 第 56 回代数学シンポジウム報告集，(2012) 103-118, 査読無

(6) K. Fukaya, Y.-G. Oh, K.Ono, H. Ohta, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, II, Selecta Mathematica New Series、17(2011), 609-711, 査読有, DOI 10.1007/s00029-011-0057-z

(7) H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Ranking patterns of unfolding models of codimen- sion one. Adv. App. Math.47 (2011) 379-400, 査読有 ,DOI:10.1016/ j.aam.2010.11.002

(8) L. Weng, Stability and Arithmetic: An extract of essence, RIMS Kokyuroku Bessatsu B19 (2011) 187-220,査読有

(9) I.Birwas, G.Schumacher, L.Weng, Deligne pairing and determinant bundle, Elec. Res. Ann. Math. Sci. 18(2011) 91-96, 査読有 DOI:10.3934/era.2011.18.91

ホームページ等

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nakamura