

複雑現象に挑む形態変動解析学の構築

Development of Analysis on Evolving Pattern for Complicated Phenomena

儀我 美一 (GIGA YOSHIKAZU)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授



研究の概要

結晶成長現象、流体運動等、自然科学の諸現象を記述するために用いられている非線形偏微分方程式に対してさまざまな手法や概念を確立することにより、複雑な形状や形態の変化を厳密に数学的現象として捉えることを第一の目的としています。その上でその解のさまざまな性質を解析することにより、形状や形態がどのように変わっていくかを考察します。

研究分野：数物系科学・数学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象

1. 研究開始当初の背景

形状や構造の変動を正確に捉え解析することは、数学分野だけではなく、科学技術全般の複雑な現象を理解し、解明するために重要です。複雑な結晶がどのように形成されてきたか、といった自然科学的な問題から複雑な画像からどのようにノイズを除くとよいかといった工学的な問題まで、形態変動に関する問題はさまざまです。

2. 研究の目的

本研究では図形やパターンの変動を記述する重要な非線形偏微分方程式に対し、必ずしも微分可能とは限らない解の複雑な挙動や性質を解明すると共に、さまざまな数学モデルとの関係を明らかにするために、粘性解析、変分解析、漸近解析、実解析、確率解析を深化させていきます。また結晶成長分野など関連分野への応用を目指すだけではなく、複雑な現象を図形の変動と捉え、従来つながりのなかったとされる分野への応用の可能性を探索していきたいと考えております。

3. 研究の方法

個人研究、海外共同研究者や研究協力者との共同研究を主体とします。このため国際ワークショップ、学際的国際会議やチュートリアルセミナーを開催し研究者ネットワークを強化します。これまでに開催した主なものは以下のとおりです。

- (i) Minisemester on evolution of interfaces 2010 (平成 22 年度)

- (ii) Front propagation, biological problems and related topics: viscosity solution methods for asymptotic analysis (平成 23 年度)
- (iii) Mathematical Aspect of Image Processing and Computer Vision (平成 21 年度、22 年度、23 年度)
- (iv) 表面・界面ダイナミクスの数理 I、II (平成 23 年度)
- (v) 致死性不整脈の機序の解明 I、II (平成 23 年度)

4. これまでの成果

大きく 5 つのテーマに分けて述べます。

① **形態変動解析に適した新たな解概念の定式化**：非線形偏微分方程式の「解」はたとえ時刻ゼロのとき滑らかであっても、やがて尖って特異点を持つことがあります。微分できない関数を微分方程式の「解」と理解するためには、解概念の拡張が必要になります。また方程式自体に特異性があり通常の意味では何をもって「解」としてよいかわからないこともあります。結晶成長現象や画像処理を記述するさまざまな方程式についてこの問題を検討し、新たな解概念を導出し、またその解の性質を解析しました [文献 1]。例えば 2 階特異拡散方程式に関する粘性解の概念の拡張や、駆動力付平均曲率流方程式に対するヴァリフォールド解の概念の確立とその正則性理論の構築です。さらに半導体結晶表面の変化等を記述すると考えられている応用上重要な 4 階の特異拡散型の表面拡散流方

程式について解の概念を明確にしました。その上で、周期境界条件の場合、この全変動流型方程式の解のグラフは有限時間内に平らになってパターンが消える有限消滅性を証明しました [文献 2]。比較原理の無い 4 階方程式では初めての画期的成果で、形態変動解析において重要な基礎理論です。また初期形状が連続でも瞬間的に不連続になるという、2 階問題では起こらない珍しい現象も発見しました [文献 1]。

② **解の挙動の解析**：解の存在や一意性がわかると、次に解の挙動が課題となります [文献 3]。形態変動の解析としては例えば時間無限大での形態が一定になるのかどうかは大きな問題です。このような問題に対しても本研究は大きな貢献をしております。例えばハミルトン・ヤコビ方程式の時間無限大での解の漸近挙動について、従来全く取り扱われていなかった非強圧的なハミルトニアン [文献 4] や、ノイマン条件を境界条件とした問題 [文献 5] に対して、その時間無限大での漸近挙動の特徴づけに成功しています。粘性解理論といった数学解析の進展だけではなく、結晶成長現象解明にも重要な結果です。

③ **離散モデルと連続モデルの相互関係の解析**：例えば、平均曲率流方程式の時間離散的微分ゲームや時間離散の変分スキームによる近似解の収束を境界条件付の場合や非等方的な場合等、従来扱われていなかった条件下で証明しました。

④ **次元の効果の解析**：3 次元非圧縮粘性流体の渦度方向が連続ならば、渦度自体がいくら大きくても流れに特異点が生じないことを、2 次元流への帰着により示しました [文献 6]。渦度方向があまり変わらないと 2 次元になるという物理的直観を反映した、自然な証明です。そこで用いた「爆発法」の精神を線形化方程式であるストークス方程式に応用し、30 年間未解決の「ストークス半群の有界関数の空間での解析性」を一般的な領域で証明することに成功しました (投稿中)。

⑤ **科学技術諸分野からの問題探索**：結晶成長分野を中心にこれまで定式化できた問題について顕著な成果を得ました。例えば結晶表面で強さが異なる複数の螺旋転位が衝突を繰り返しながら表面が成長する現象を正確に捉えることは重要です。従来の等高面法ではこれらの複雑な状況を計算すること自体不可能でした。本研究で開発した被覆空間上の等高面法に転位の加法的表現を用いた初期値構成法を確立することにより、一般の初期形状からの数値計算が可能になりました。結晶成長学に対しても重要な貢献です。

5. 今後の計画

これらのテーマ①～④に対しては、結果のさらなる拡張や精密化や、より一般的な設定への理論構築を行います。これらの知見をも

とに、複雑流体効果など形態変動を記述する新たな方程式に取り組みます。テーマ⑤**科学技術諸分野からの問題探索**については、最終年度まで問題の抽出を行うとともに、これまで定式化した問題の数学的解決を目指します。このため、例えば次のようなシンポジウムを予定しています。一般にも公開されます。

a. Variational Methods for Evolving Objects (2012 年 7 月 30 日～8 月 3 日)
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/120730/index_en.html

b. Pacific Rim Conference on Mathematics 2013 (2013 年 7 月 1 日～5 日)
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/130701/>

c. 表面・界面ダイナミクスの数理Ⅲ (2012 年 5 月 13 日～16 日)

d. 心臓と血流の数理 (2012 年 6 月 5 日～7 日)

6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

1. M.-H. Giga and Y. Giga, Very singular diffusion equations – second and fourth order problems, *Japanese J. Ind. Appl. Math.*, **27** (2010), 323 – 345.

2. Y. Giga and R. V. Kohn, Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **30** (2011), 509 – 535.

3. M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal, *Nonlinear Partial Differential Equations – Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions*, Birkhäuser (2010), xviii + 294pp.(書籍)

4. Y. Giga, Q. Liu and H. Mitake, Large-time asymptotics for one-dimensional Dirichlet problems for Hamilton-Jacobi equations with non-coercive Hamiltonians, *J. Differential Equations*, **252** (2012), 1263 – 1282.

5. H. Ishii, Weak KAM aspects of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions, *J. Math. Pures Appl.* (9) **95**(2011), 99 – 135.

6. Y. Giga and H. Miura, On vorticity directions near singularities for the Navier-Stokes flows with infinite energy, *Comm. Math. Phys.* **303**(2011), 289 – 300.

受賞

紫綬褒章 (2010 年 11 月) 儀我美一

「数学研究」

第 2 回福原賞 (2010 年 12 月) 利根川吉廣

「幾何学的測度論を用いた二層分離問題の解析」

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~labgiga/>