

非線形偏微分方程式の大域的適切性

Theory of global well-posedness
on the nonlinear partial differential equations

小藪 英雄 (KOZONO HIDEO)

東北大学・大学院理学研究科・教授



研究の概要

非線形偏微分方程式を広範囲に渡って対象とし、解の存在、一意性、安定性といった“適切性”を研究する。定常方程式については、単に全空間だけでなく、種数のなど領域の位相不変量が方程式の可解性に与える影響をも対象とする。また障害物の形状に依存した解の非等方的な振舞い、あるいは無限遠方における解の挙動の一意性への寄与を考察する。時間発展方程式については、局所適切性にとどまらず、時間大域的可解性を明らかにする。

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：関数方程式、非線形偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

実在する物理現象は多くの場合、重ね合せの原理、すなわち線形理論によっては予測され得ず、流体の運動はその典型的な例としてあげられる。波動・量子力学でさえも、相互作用の影響により線形方程式だけによる現象解析は困難であるとされている。このように理工学の主要な対象は、重ね合せの効かない非線形偏微分方程式により記述される。

2. 研究の目的

対称とする領域の形状や空間・時間無限大での解の漸近挙動といった“大域的性質”を解析し、非線形偏微分方程式の解の構造に関して統一理論を構築することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

従来に関数解析学や変分学的なアプローチに加えて、近年盛んに成果が挙げられている調和解析学を取り入れることに特色がある。本研究では伝統的に実関数論研究が盛んであり、かつこの5年間に基礎および応用解析学の強力なスタッフを揃えた東北大数学教室をキーステーションとして、20世紀後半の目覚ましい解析学の成果を基礎に、流体の基礎方程式、反応拡散方程式、波動・分散型方程式にまたがる非線形偏微分方程式の多岐に渡ってその局所的・大域的適切性を統一的に研究し、ミレニアムに新たな理論を創造する。さらに、数値計算では扱えない極限操作により乱流の普遍原理に数学的な確証を与える。

4. これまでの成果

- (1) 流体力学の基礎方程式
 - ① 3次元有界領域における L^p -Helmholtz-Weyle 分解
 - ② 多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式に関する Leray の問題についての考察
 - ③ 一般領域における Stokes 作用素の最大正則性
 - ④ Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性に関する新たな指標
 - ⑤ 平行平板間の Couette 流の安定性
 - ⑥ 非斉次境界値条件下における Navier-Stokes 方程式の大域的弱解の存在
- (2) 実関数論的手法の開発
 - ① 臨界 Sobolev 空間と平均振動有界空間における Gagliardo-Nirenberg 補間不等式
 - ② 大域的な発散一回転の補題
- (3) 反応拡散系方程式
 - ① 弱型可積分空間と平均振動有界空間における放物型-放物型 Keller-Segel 方程式系の時間大域解の存在と自己相似解への応用
 - ② Keller-Siegel 方程式系の永井モデルに対する強解の時間漸近挙動
 - ③ 2次元 Keller-Segel 方程式系の解の局所存在定理と有限時間爆発
 - ④ 全質量有限なクラスにおける Keller-Segel 方程式系の後方自己相似解の非存在

- ⑤ 熱方程式の解の最大点挙動
- ⑥ 熱方程式の解の微分の減衰評価
- ⑦ 多孔質媒質方程式の解の等高面の凸性の崩壊
- ⑧ 符号変化するポテンシャル項付き熱方程式の解の大域的挙動
- ⑨ 非線形境界条件における熱方程式の解の爆発問題
- (4) 波動・分散型方程式
 - ① 熱および消散型非線形方程式に付随する線形化問題の評価式の確立
 - ② 高階双曲型非線形方程式の時間大域解の構成
 - ③ 零条件下における非線形波動方程式の長時間解の存在
 - ④ アインシュタイン方程式の解法についての注意
- (5) 乱流の統計理論と数理解析
 - ① 回転乱流場における Large Eddy シミュレーション
 - ② フリンジ領域を用いたスペクトル法による乱流境界層の DNS
 - ③ 乱流混合層における統計解析

5. 今後の計画

- (1) 研究集会の開催
 - ① 第4回 MSJ-SI “Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations”
 - ② SIAM Conference on Analysis of PDE
 - ③ 若手発展方程式セミナー
- (2) 研究班
 - ① 非線形波動分散型方程式研究班
 - ② 実関数論研究班
 - ③ 乱流の統計理論と数理解析研究班
- (3) 国際シンポジウムへの参加
- (4) 研究支援者の雇用

6. これまでの発表論文等

- (受賞等も含む)
- (1) Blow-up set for a semilinear heat equation with small diffusion, Y. Fujishima and K. Ishige, J. Differential Equations **249**, 1056–1077, 2010.
 - (2) Parabolic quasi-concavity for solutions to parabolic problems in convex rings, K. Ishige and P. Salani, Math. Nachr. **283**, 1526–1548, 2010. (雑誌 Math. Nachr. の Editor Choice を受賞)
 - (3) Leray’s problem on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data, Kozono, H., Yanagisawa, T., Math. Z. **262**, 27–39, 2009.
 - (4) Global DIV-CURL Lemma in bounded

- domains in \mathbb{R}^3 , Kozono, H., Yanagisawa, T., Jour. Funct. Anal, **256**, 847–3859, 2009.
- (5) L^r -variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains, Kozono, H., Yanagisawa, T., Indiana Univ. Math. J. **58**, 1853–1920, 2009.

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/researchfields/kozono.html>