

非線形現象解明に向けた計算機援用解析学の構築

Development of computer assisted analysis for complicated nonlinear phenomena

中尾 充宏 (NAKAO MITSUHIRO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授



研究の概要

計算機援用証明あるいは数値的検証法とは、数学上の問題に対する解の存在（および一意性）を計算機による数値計算によって証明すること、およびそのための数値計算法のことである。本研究では、非線形微分方程式をはじめとする広い応用解析学分野での計算機援用証明を実現し、その有効性を実証するとともに、一層優れた数値的検証法を開発・実装し、計算機援用証明を21世紀における解析学研究の方法論として定着させることを目指すものである。

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数値解析・数値的検証法・精度保証付き数値計算・計算機援用証明

1. 研究開始当初の背景

数値的検証法は、近年の計算機技術のめざましい発展と相まって、応用解析学や計算理工学に現れる複雑な非線形問題の中で、理論解析が困難な問題に対する数値的証明としてその意義が次第に高まりつつある。研究代表者は、楕円型境界値問題の有限要素近似とその構成的 a priori 誤差評価を、区間解析と有効に組み合わせることにより、厳密解が計算機上で捉えられことを1988年世界に先駆けて立証した。この方式は、偏微分方程式の有限要素近似解に対する数学的に厳密な a posteriori 誤差評価をも与えるものである。これは日本発の全くオリジナルなものであり、偏微分方程式に対する数値的検証法の突破口を開くものとして海外でも大きなインパクトを与えてきた。その後、周辺研究者の支援も得て、この原理にもとづく研究を進め、研究代表者とその研究グループは、偏微分方程式の解に対する数値的検証法の研究において常に世界を先導する研究成果を上げ続けてきた。

2. 研究の目的

本研究はこれまでの成果の上に、より一層広い非線形問題をはじめとする応用解析学への計算機援用証明の実現を目指している。特に未だほとんど手つかずの非線形発展方程式への新しい数値的検証法の開発と適用も含めて、新たな研究組織を構成し、これま

での研究をさらに格段に発展させ「計算機援用解析学」として新たな学問分野の構築を企画するものである。研究期間内には以下の主要到達目標を設定している。

(1) 楕円型偏微分方程式に対する解の数値的検証方式について、拡張改良を図るとともに、非線形発展方程式の解の検証手法を新たに開発する。

(2) 実際的非線形現象を扱う他分野の研究者と広く連携し、重要な非線形問題の解の数値的検証を実現し、その有効性を実証する。

3. 研究の方法

研究代表者と6名の研究分担者ともにそれぞれが関連分野における多くの優れた研究成果を蓄積しており、本研究の研究計画の実施に当たっては、その研究経緯に即して実施することとした。また、連携研究者として早稲田大学の石進一教授、研究協力者として皆本晃弥(佐賀大学)、小林健太(金沢大学)、橋本弘治(中村学園大学)、木下武彦、大金邦成、Kim Myoungnyoun (以上九州大学)の各氏の研究支援を得ている。また、ドイツKarlsruhe大学のMichael Plum 教授にも海外共同研究者として協力を仰いだ。各分担者は以下の分担課題のもとで恒常的に検討を進めている。

中尾充宏：偏微分方程式の解の数値的検証と研究統括

柴伸一郎：パターンダイナミックスの計算機援用解析

田端正久：計算機を用いた混相流問題の解析
長藤かおり：非線形現象の安定性に関する計
算機援用解析

村重 淳：非線形力学系理論の計算機援用証
明

渡部善隆：熱対流問題における大域的分岐構
造の数値的解明

山本野人：非線形関数方程式の解に対する数
値的検証法

4. これまでの成果

(1) 共通的な検証技法とその関連研究

①有限要素法の構成的誤差評価

(i) 非強圧的楕円型問題に対する構成的誤差
評価を与えた

(ii) 計算機援用証明による構成的 L^2 誤差評
価定数の算定を実現した

②数値的検証法の改良

(i) 線形化逆作用素ノルム算定法を改良した

(ii) 高次多項式による高精度検証方式を開
発した

③非線形発展方程式の検証定式化において
空間・時間同時離散化による検証定式化を得
た

④遅延微分方程式に対する解の数値的検証
法を定式化した

⑤常微分方程式の周期解の検証をポアンカ
レマップの精度保証により与える方法を開
発した

⑥多倍長演算ライブラリの開発と記号処理
との融合研究を実現した

⑦流れ問題に対する高精度数値解析法を開
発した

(2) 個別の非線形現象の数学モデルに対す
る数値的検証とその関連研究

①3次元熱対流問題の検証

ロール、六角形、四角形タイプの分岐解を検
証した

②Orr-Sommerfeld 固有値問題の精度保証に
よる流れ問題の不安定性に関する数値的検
証を実現した

③非有界領域でのシュレディンガー作用素
の固有値非存在検証を行った

④3次元 Photonic Crystal のバンド・ギャ
ップの存在検証の定式化を行った

⑤ホモクリニック軌道付近の周期解の安定
性評価法を開発した

⑥混相流問題の特性曲線有限要素解析を実
現した

⑦形態形成モデルの数理・数値解析を行った

5. 今後の計画

おおむね現在の検討分担のもとで、以下の課
題について検討を進める。

(1) 共通的な検証技法とその関連研究

①有限要素法の構成的誤差評価

②非線形楕円型方程式の解の数値的検証方式

の拡張・改良

③正則性の低い楕円型作用素の固有値問題

④非線形発展方程式の検証実現

⑤Navier-Stokes 方程式の解の数値的検証・

⑥遅延微分方程式の解の検証実現

2. 個別問題に関する数値的検証方式とその
適用

①Orr-Sommerfeld問題に関する安定性問題
の数値的検証

②熱対流問題に対する分岐解の大域構造解明

③反応拡散方程式系の解に対する数値的検証

④多流体流れ問題の数値的追

⑤カオスを含む非線形現象の数値的検証

⑥beam方程式から生じる進行波解に関す
る数値的検証

(3) 計算機援用証明のための汎用ソフトウ
ェア化の検討

①楕円型問題の精度保証における汎用ソフ
トウェア化

②精度保証付き多倍長演算のライブラリ化

③数式処理との融合手法の開発

6. これまでの発表論文等

[1] Kinoshita, T., Hashimoto, K. and

Nakao, M.T., On the L-2 a priori error
estimates to the finite element solution
of elliptic problems with singular
adjoint operator, 30, 289-305 (2009) .

[2] Y. Watanabe, M. Plum, M.T. Nakao, A
computer-assisted instability proof for the
Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille
flow, Z. Angew.

Math. Mech., 89, No.1, 5-18 (2009) .

[3] M.-N. Kim, M.T. Nakao, Y. Watanabe, T.
Nishida, A numerical verification method
of bifurcating solutions for 3-dimensional
yleigh-

Benard problems, Numerische

Mathematik, 111, 389-406 (2009).

[4] H. Notsu and M. Tabata, A single-step
characteristic-curve finite element scheme of
second order in time for the incompressible
Navier-Stokes equations, Journal of Scientific
Computing, 38, No. 1, 1—14 (2009).

[5] Nakao, M.T., Hashimoto, K.,
Guaranteed error bounds for finite element
pproximations of noncoercive elliptic
problems and their applications, Journal of
Computational and Applied Mathematics,
218, 106-115 (2008).

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mtnakao/>