

代数幾何と可積分系の融合と新しい展開
New developments and interaction between
Algebraic Geometry and Integrable Systems

齋藤 政彦 (SAITO MASAHIKO)

神戸大学・大学院理学研究科・教授



研究の概要

本研究課題では、高次元代数多様体論やモジュライ理論を通じて、可積分系の研究における現在までの研究を捉えなおし、これらの深い関係を明確にかつ精密に捉える数学的基礎理論を確立し、さらに、両研究分野を融合し新たな研究分野を展開することを目的とする。

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数

キーワード：モジュライ空間、パンルヴェ方程式、モノドロミー保存変形、ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

代表者等のパンルヴェ方程式の研究を通じて、可積分系の相空間の代数幾何学的方法の有効性が明らかになった。特に線形接続のモノドロミー保存変形を代数幾何学的なモジュライ理論で精密に取らえる事の有効性が認識された。一方、高次元代数幾何の森理論や極小モデル理論の進展、新しい可積分系の発見等があり両分野の深い関係も明らかになりつつあった。加えて数理物理に源をもつ、ミラー対称性や量子コホモロジーにおける様々な予想に関して、代数幾何と可積分系の関連が報告されている。

2. 研究の目的

我々の研究目的は、可積分系の相空間の幾何学をモジュライ理論や高次元双有理幾何学を用いて、明解かつ精密に扱える基礎理論を構築し、代数幾何および可積分系、そして関連分野のさらなる発展を図る事である。併せて、量子コホモロジーやミラー対称性予想の明解な数学的理解が可能となる基礎理論を構築する事も目的とする。

3. 研究の方法

通常の数学の研究の基本は、個々の研究者が各自の問題意識のもとで、自ら研究を進める事である。加えて、分野横断的な研究会を組織し、各研究者の独自の研究課題や成果を、セミナーや研究集会の機会に発表し、相互理解や討論する事により、問題点や解決方法を模索する。

4. これまでの成果

現在までの成果を大きく分けると次の3つに分けられる。

- (a) モノドロミー保存変形の幾何学の確立。
- (b) 高次元双有理幾何学の研究と可積分系への応用。
- (c) 量子コホモロジー、ミラー対称性の数学的理解。

研究(a)については、稲場・岩崎・齋藤による代数曲線上の確定特異点のみをもつ安定接続の理論とそれを用いたリーマン・ヒルベルト対応の理論がすでにあり、有効である事が知られていたが、さらに一般に不確定特異点を許す安定接続の理論を稲場と共同研究し、局所指数に関する条件付きではあるが、ほぼ完成している。

また、van der Put との共同研究により、8種類のパンルヴェ方程式を、線形接続のモノドロミー・ストークス保存変形の方程式として得る時に、10種類の階数2の射影直線の線形接続が対応する事を示した。また拡張されたリーマン・ヒルベルト対応の行き先であるモノドロミー・ストークスデータのモジュライ空間が、10種類の具体的なアフライン3次曲面の族として得られる事も示した。さらに、派生する結果として安定接続のモジュライ空間の良い座標の理論、 λ 接続を通じて、パンルヴェ系がヒッチン系に退化する様子の精密な記述、接続のモジュライ空間の跳躍現象と τ 関数の関係等について田原や宮崎と結果を得ており、現在論文を準備中である。研究(b)については、連携研究者の森による Q

コニク束に関する Prokhorov との共同研究、並河によるべき零軌道の双有理幾何的研究、藤野の極小モデル理論の基本定理を簡易化、松下の正則ラグランジュ束の幾何学等の成果がある。可積分系への応用では山田によるパデ近似による微分および差分方程式の導出や、岩崎によるパンルヴェ VI 型方程式に関する代数曲面の力学系の解析が興味深い。

研究(c)について、連携研究者である深谷は、シンプレクティック幾何学の観点からホモロジー的ミラー対称性の基礎づけを目指し、大部の著書を出版し、多くの興味ある結果を得ている。吉岡は Donaldson 不変量の壁越え公式を一般の代数曲面の場合に示し、K-理論的 Donaldson 不変量の壁越え公式を Chern-Simon 項を入れた形で定式化し、Nekrasov 分配関数を利用して書き下した。また、ある条件の下で K3 曲面上の安定ベクトル束のモジュライ空間のホモロジー群にリー環の作用がある事を示した。連携研究者の細野は、カラビ・ヤウ多様体の高次種数の Gromov-Witten 不変量を BCOV 正則アノマリー方程式の観点から研究し、BCOV 微分環という概念を定義し、いくつかの例について考察した。

研究者相互の情報交換の為、ホームページを整備し、特に研究集会・セミナーの情報を Math Calendar に掲示している。(下記参照)

The image shows a website header with the title "New Developments and Interaction between Algebraic Geometry and Integrable Systems" and a navigation menu including Summary, Member, Seminar and Symposium, Math Calendar, and Link. Below the menu is a "Math Calendar" for January 2010. The calendar grid shows dates from 1 to 30. Key events are highlighted: Jan 3 (Miss-18ko Saito's HP), Jan 10 (Department of Mathematics), Jan 11 (Graduate School of Science), Jan 17 (Kobe University), and Jan 24 (Japanex).

また、神戸大学で主催したセミナーや研究会の講演をビデオに収録し、HP で公開している。



5. 今後の計画

研究(a)の基礎理論の論文の完成させ、また付随する結果も論文にまとめたい。

この分野の専門書を出版する予定である。研究(c)について。量子コホモロジーやミラー対称性については、徐々に数学的理解が深まりつつあるが、当研究の研究(a)の基礎理論を踏まえた研究を推進したい。

6. これまでの発表論文等

齋藤 政彦, パンルヴェ方程式と代数幾何、数学、2010、掲載予定

K. Yoshioka, An action of a Lie algebra on the homology groups of moduli spaces of stable sheaves, Adv. Stud. Pure Math., 58, 2010. 掲載予定

S. Hosono, BCOV ring and holomorphic anomaly equation, Adv. Stud. Pure Math., 59, 2010, 掲載予定

M. van der Put and M.-H. Saito, Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations, Annales de l'institut Fourier, 59, no. 7, 2611-2667, 2009.

Y. Yamada, A Lax formalism for the elliptic difference Painlevé equation, SIGMA, 5, 15p, 2009.

S. Mori and Y. Prokhorov, On \mathbb{Q} -conic bundles, Publ. RIMS Kyoto Univ., 44, 315--369, 2008.

Y. Namikawa, Birational geometry and deformations of nilpotent orbits, Duke Math. J., 143, 375--405, 2008.

国際研究集会の報告集 :

M. -H. Saito, S. Hosono, K. Yoshioka, (Eds.), New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry, (RIMS, Kyoto, 2008), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 59, 2010. p. 437.

解説記事 :

齋藤政彦 : パンルヴェ型方程式とモジュライ、別冊・数理科学「現代幾何学の発展」2010年4月。

ホームページ等

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/ftop.html>