

モジュライと代数的サイクルをめぐる代数多様体の数理  
Study on algebraic varieties related to moduli spaces  
and algebraic cycles

桂 利行 (KATSURA Toshiyuki)

法政大学・理工学部・教授



研究の概要

代数幾何学において、中心的な研究対象である代数多様体を理解しようとする時、分類の観点から重要なモジュライ空間を調べることで、また、代数多様体がどのような部分多様体を持つかを調べることは有力な方法である。本研究では、代数多様体のモジュライ空間と代数的サイクルの織りなす代数幾何学を総合的に研究することを目的とする。

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

1. 研究開始当初の背景

代数多様体を理解しようとする時、分類するというのは有力な方法である。分類の指標としては、離散的な不変量と連続的なパラメータがある。連続パラメータの理論は、1960年代にD. Mumfordによって厳密なモジュライ空間の理論として確立された。それは、しばしば代数多様体の構造を持ち代数幾何学の重要な研究対象となっている。また、どのような部分空間が存在するかを調べることも理解するための有力な方法を与える。

2. 研究の目的

有限個の  $i$  次元部分多様体の整係数の形式的な和を  $i$  次の代数的サイクルという。この研究の目的は、モジュライ空間と代数的サイクルという重要な2つの対象を調べることである。中心的な課題は、1. 代数多様体のモジュライ空間の研究、2. 志村多様体、とくにアーベル多様体のモジュライ空間の研究、3. 広義の Calabi-Yau 多様体をファイバーとするファイバー空間の研究、4. 代数的サイクルの構造の研究、など。

3. 研究の方法

研究課題1、2については、中村、金銅、向井が担当、課題4については齋藤秀司、寺杣友秀が担当する。数論幾何関係を齋藤毅、特異点関係を石井が、トーリック多様体関係を石田が担当し、全体を代表者が統括する。代数幾何関係の資料を整備するとともに、国際的な研究集会と小規模な研究会を適宜開催して情報の交流をはかり、研究を推進する。

4. これまでの成果

(1) 標数2における Artin 不変量1の超特異 K3 曲面の構造の解明 (代表者と金銅の共同研究)。このような K3 曲面の Neron-Severi 群は Leech lattice と符号  $(1, 1)$  の lattice の直和に埋め込めることを利用して、金銅と Dolgachev は、このような K3 曲面をある性質を持つ 42 本の有理曲線の存在によって特徴つけた。これらの有理曲線は lattice の Leech roots に対応しているが、本研究で一般化された Kummer 曲面を用いて、この Leech roots を幾何学的に構成し、その意味を明らかにした。これは、標数2に特有の現象であり、他の標数では状況がまったく異なり興味深い。ちなみに、標数2では他の標数とは異なり、超特異楕円曲線の直積を involution で割った曲面は有理的になり、K3 曲面にはならないので、上記のように一般化された Kummer 曲面を考える必要がある。

(2) 準楕円ファイバー空間の研究。標数が0または3以上 (resp. 2) の代数的閉体上の小平次元が1の楕円曲面は、 $m$  が14以上 (resp. 12) のとき  $m$  重の標準因子が楕円曲面の構造を与え、それぞれ14と12が最良であることは上野と代表者の共同研究によってすでに知られている。小平次元が1の準楕円曲面の場合、標数が3 (resp. 2) なら  $m$  が5 (resp. 4) 以上なら準楕円曲面の構造を与えることが示せた。5は最良であることがわかる。

(3) Calabi-Yau 多様体と正標数の不変量の研

究 (代表者と van der Geer との共同研究)。F. Oort がアーベル多様体に対して定義した  $a$ -数、Artin-Mazur による formal group の height で定義される  $h$ -数をさらに一般の代数多様体に対する不変量としての定義を与え、その性質を解明した。Calabi-Yau 多様体のこれらの不変量もこの枠組みで考えることが出来る。これらの成果はすでに口頭で発表した (6 の [7][8])。

#### (4) その他の成果

研究分担者中村は 1999 年に構成したモジュライ空間のコンパクト化  $SQ_{[g, N]}$  に加えて、もうひとつ自然なコンパクト化  $SQ^{\text{toric}}_{[g, N]}$  を構成し、ふたつのコンパクト化の間の関係について次のような基本的な定理を証明した。 $SQ^{\text{toric}}_{[g, N]}$  から  $SQ_{[g, N]}$  への自然な射が存在し、内部  $A_{[g, N]}$  上では恒等写像であって、両者の正規化の同型を引き起こす。金銅は、種数 6 の代数曲線のモジュライ空間を IV 型有界対称領域の算術商として記述し、代数曲線の退化と Satake-Baily-Borel のコンパクト化との関係を明らかにした。向井は、高次偏極  $K3$  曲面について、次数 30 の generic なものの研究を行い、有理 3 次曲線のモジュライ空間の中でのモジュライの良い記述を得た。特に、それらのモジュライ空間は単有理的であることが示される。また、primitive で次数 32 の場合のモジュライ空間の単有理性の証明の簡易化に成功した。

斎藤秀司は、有限体上の代数多様体に対する加藤予想の標数と素な部分の特異点の解消の仮定なしに示すことに成功し、応用としてモチフィックコホモロジーの有限性に関する新しい結果を得た。斎藤毅は数論幾何方面に於いて、馴分岐被覆の理論を整備し、一般の可構層に対しても Swan 類を定義し、高次順像の Swan 類をもとの可構層の Swan 類の順像として表わすという 1 進 Riemann-Roch 公式として、局所体上の多様体上の 1 進層の導手公式を与えた。寺杣は種数 3 の代数曲線とある種の Calabi-Yau threefold の代数的対応を与え、この対応が与えるコホモロジー群間の射と Hodge 構造の興味深い関係を示した。石田は、正規性を仮定しない場合を含めたトーリック多様体上の接続層のコホモロジー群の記述の研究を行い、ある種の複体が互いに擬同型になることを示した。石井は代数多様体の特異点と関連して jet scheme の構造を調べ基本的な結果を得た。つまり、1 つの jet scheme が非特異ならば多様体は非特異である、多様体の間に morphism があるときこれから導入されるある次数の jet scheme の間の morphism が同形になれば多様体の間の morphism は同形である、など。

なお、これまでに開催した国際会議や研究会のなどのリストはホームページにある。

#### 5. 今後の計画

平成 22 年度以降もこの 3 年間と同様であり、関連する数学の研究集会を開催して総合的な討論を行うとともに、分担者との個別の討論を織り交ぜて研究を進める。代数幾何、数論関係の資料を整備し、国内外の研究集会に参加し最新の情報を収集する。平成 23 年 1 月には 10 名程度の海外の本研究に関する第一線の研究者を招聘し、国際会議を開催する予定である。現在考えている招待講演者は、V. Alexeev, S. Schroeder, T. Ekedahl, F. Yu, Q. Liu, Y. Andre, B. Conrad, van der Geer, I. Dolgachev, C.-H. Chai, B. Moonen, M. Schuett 等である。最終年である平成 24 年 1 月にも中規模のまとめの国際会議を予定している

#### 6. これまでの発表論文等

[1] I. Nakamura : Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces (I. Nakamura and Lin Weng eds., Sapporo 2007),

to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 58, Mathematical Society of Japan, 2010, pp. 69-135

[2] K. Mathsumoto and T. Terasoma, Arithmetic-geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties, to appear in Internat. J. Math.

[3] T. Terasoma, Algebraic correspondences between genus three curves and certain Calabi-yau varieties, to appear in Amer. J. Math.

[4] S. Saito and K. Sato, A finite theorem for zero-cycles over  $p$ -adic fields, to appear in Annals of Mathematics.

[5] S. Mukai, Curves and symmetric spaces, II, to appear in Ann. of Math.

[6] M. Artebani and S. Kondō, The moduli of curves of genus 6 and  $K3$  surfaces, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[7] T. Katsura, Invariants of algebraic varieties in positive characteristic, KIAS Seminar, KIAS (Korea), March 29, 2010. (口頭発表)

[8] T. Katsura, Some remarks on invariants of algebraic varieties in positive characteristic, Conf. on Arithmetic and Algebraic Geometry, Univ. of Tokyo, July 4, 2008. (口頭発表)

[9] 研究分担者斎藤毅、斎藤秀司はそれぞれ 2010 年 8 月インドで開かれる国際数学者会議招待講演者

#### 7. ホームページ等

<http://kat.hosei.ac.jp/study>