

平成30年 9 月 30 日

若手研究者海外挑戦プログラム報告書

独立行政法人 日本学術振興会 理事長 殿

受付番号 201780065
氏名 相野真行

(氏名は必ず自署すること)

若手研究者海外挑戦プログラムによる派遣を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。
なお、下記記載の内容については相違ありません。

記

1. 派遣先: 都市名 ニース (国名 フランス)
2. 研究課題名 (和文) : 標準球面を特徴づけるリーマン多様体及びその安定性
3. 派遣期間: 平成29年11月30日 ~ 平成30年3月30日 (121日間)
4. 受入機関名・部局名: フランクフルト大学 テュビンゲン研究所
5. 派遣先で従事した研究内容と研究状況 (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

滞在期間中の研究においては、非自明な平行 p 次微分形式が存在するとき、考えているリーマン不変量が球面の場合から遠くなることを示した。以下でこのことを詳しく説明する。

球面の、リッチ曲率条件下でのラプラシアン第一固有値による特徴づけとして、リヒネロヴィッツ・小島の定理があるが、その証明では、リッチ曲率条件下でラプラシアン第一固有値が球面のものと等しいときその固有関数が、ヘシアン型の等式を満たすことを用いる。一方で、このヘシアン型の等式を満たす非定数関数が存在すると、リッチ曲率条件とは関係なく、考えているリーマン多様体は球面と共形的になる。さらにこの非定数関数がラプラシアンの固有関数として取れるなら、球面と等長的になる。本研究の研究テーマであるリーマン不変量 (以下では Ω_1 と書く) は、リヒネロヴィッツ・小島の定理における不等式から、リッチ曲率条件とは無関係な部分を取り出したもので、その量の、すべての閉リーマン多様体にわたって成り立つ不等式は、リヒネロヴィッツ・小島の定理の不等式を復元しており、等号条件はヘシアン型の等式の非定数解の存在を特徴づけている。

リヒネロヴィッツ・小島の定理の改良される条件の一つとして、平行 p 次微分形式の存在がある。本研究では、平行 p 次微分形式が存在するとき、 Ω_1 の評価も改良されること、また、多様体が4次元かつ p が2である場合を除いて、その評価の等号が成り立てば普遍被覆が球面との積多様体となることを示した。この結果は、平行 p 次微分形式の存在のものとのリヒネロヴィッツ・小島の定理の改良の等号条件を導く。その等号条件は、 p が多様体の次元の半分である場合を除いてすでに知られていたが、ここでは $p=2$ の場合を除いて p が多様体の次元の半分である場合にも示すことができた。ただし $p=2$ の場合には複素2次元の複素射影空間などの反例がある。

6. 研究成果発表等の見通し及び今後の研究計画の方向性 (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

派遣先で従事した研究内容は、現在論文の形にまとめている。平行 p 次微分形式が存在する際のリヒネロヴィッツ・小島の定理の改良、あるいは Ω_1 の評価の改良は、 $(p-1)$ 次微分形式のヴァイツェンベックの公式や $(p-1)$ 次キリング微分形式との関連を持つ。キリング 1 形式はキリングベクトル場と同一視され、キリング p 形式はその p 形式への一般化であるが、 p が 2 以上のとき、非平行なキリング p 形式は、特殊ホロノミー群を持つ場合など、多くの場合で存在しないことがセメルマンらにより示されている。滞在中の研究における研究結果は、 Ω_1 の高次微分形式バージョンを導入し、平行 p 次微分形式が存在するとき Ω_1 との比較を行うことにより得られ、等号条件の証明には、セメルマンらの結果が重要な役割を果たした。 Ω_1 の p 形式バージョンに対して成り立つ評価の等号条件は、考えているリーマン多様体が非平行なキリング p 形式を持つことを特徴づける。そこで、例えば特殊ホロノミー群を持つ場合などにこの量の評価は改良されるか、という問いが発生する。四元数ケーラーの場合に $p=3$ の場合には非自明な評価を計算した（特に非平行キリング 3 形式の非存在を導く）が、ベストな評価ではないと思われ、今後、そのベストな評価を探すことを、例の計算を通しながら行う。

7. 本プログラムに採用されたことで得られたこと (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

本研究の研究テーマの一つであった安定性について、滞在期間中には大きな結果は得られなかったが、受入教員との議論の中で多くの知見を得ることができた。受入教員であったオーブリー氏は球面のリーマン不変量に対する安定性についての専門家であり、今後のこのテーマにおいてやり取りをしていくことが予想される。特に、スカラー曲率一定の際の Ω_1 のピンチング問題を研究する際のとっかかりを得ることができ、帰国後、現在大きく進展中である。

ベルジェやギャロなどのリーマン幾何学の大家の流れをくむオーブリー氏のアドバイスは、上記の研究成果にもとどころ生かされているが、それに留まらず、今後の研究においても、より一層、影響を受けるだろう。

特別なリーマン多様体の特徴づけの安定性に関する研究を行うオーブリー氏の共同研究者も多くいるので、今後彼らとのつながりも期待できる。

以上のように、得難い経験を本プログラムを通してすることができた。