

令和 3年 8月 10日

若手研究者海外挑戦プログラム報告書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

受付番号 202080015

氏 名

田中 智之

(氏名は必ず自署すること)

若手研究者海外挑戦プログラムによる派遣を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。
なお、下記記載の内容については相違ありません。

記

- 1 派遣先: 都市名 トゥール (国名 フランス)
- 2 研究課題名 (和文) : 高階の非線形分散型方程式の適切性と対称構造
- 3 派遣期間: 令和 2年 10月 2日 ~ 令和 3年 7月 11日 (283日間)
- 4 受入機関名・部局名: トゥール大学 ドニ・ポアソン研究所
- 5 派遣先で従事した研究内容と研究状況 (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

採用者は、一般化ベンジャミン・小野方程式の初期値問題の適切性について、受け入れ研究者であるMolinet氏と共同で研究を行なった。一般化ベンジャミン・小野方程式とはベンジャミン・小野方程式の非線形項を2次から k 次 (k は4以上の自然数)に変化させたものである。3次の非線形項の場合は修正ベンジャミン・小野方程式と呼ばれる。ベンジャミン・小野方程式は、縮小写像の原理に基づく解の構成法を直接適用することが難しい方程式として知られ、この方程式に対する正則性の低い空間での適切性を得るために様々な道具が整備されてきた。

本研究では、受け入れ研究者のMolinet氏らが開発した手法 (エネルギー法とBourgain空間を組み合わせた議論) を用いて、一般化ベンジャミン・小野方程式の初期値問題の適切性を、正則性の仮定を $3/4$ 以上のところで証明した。また、無条件一意性も同時に得られた。さらに、線形項のシンボルのオーダーがベンジャミン・小野方程式とKdV方程式の間にある場合、またそれらが摂動された場合 (例としてはIntermediate long wave方程式などを含む)、非線形項が収束半径が無量大である冪級数の場合にも初期値問題の適切性と無条件一意性を得ることができた (ただし、正則性の仮定は線形項のシンボルのオーダー応じて決まる)。

エネルギー法とBourgain空間を組み合わせた議論としては、Molinet氏が開発した手法の他に、Ionescu-Kenig-Tataruらによる短時間フーリエ制限法という手法がある。一般化ベンジャミン・小野方程式の初期値問題の適切性については、短時間フーリエ制限法を用いたKim-Schipaの先行研究がある。今回得られた結果は、正則性の仮定はKim-Schipaの結果と同じであるが、彼らの主張に無条件一意性を加え、より広いクラスの方程式を扱った点が新しい。

その他、いくつかのMolinet氏との共同研究が進行中である。なお、扱った方程式が高階でないのは、採用者の特別研究員の研究課題の進捗状況と、お互いの興味のすり合わせの結果である。

6 研究成果発表等の見通し及び今後の研究計画の方向性 (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

一般化ベンジャミン・小野方程式に対する結果は、論文としてまとめ国際雑誌に投稿し、現在は査読中である。プレプリントは、arXiv:2105.08731にて公開されている。またこの結果を京都大学で開催された国際研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」で発表した(招待講演)。2021年9月に千葉大学で開催される「日本数学会2021年度秋季総合分科会」でも講演予定である。

今回得られた適切性の結果は、正則性が $3/4$ 以上という仮定の元であった。次なる疑問として現れるのは、 $3/4$ よりも小さいところで適切性が成立するかどうかである。Molinet氏の開発した手法(以下、Molinet-Ventoの方法と呼ぶ)は、正則性が $1/2$ よりも大きいところで評価を閉じさせることに長けている($1/2$ 以下でも評価は可能であるが、ソボレフ空間が代数でなくなるので関数空間を精密化させる必要があり議論が複雑になる)。Molinet-Ventoの方法は、非共鳴な非線形相互作用を処理する手法であるため、(非自明な)共鳴な相互作用が現れる場合には別の議論が必要である。そして、一般化ベンジャミン・小野方程式のような非線形項の次数が高い方程式の場合、共鳴な相互作用がある。今回の研究では、この共鳴な相互作用をimproved Strichartz評価を用いて処理した。このimproved Strichartz評価を適用する際に正則性の仮定である $3/4$ が現れる(非共鳴な相互作用は $1/2$ よりも大きいところで評価することができる)。従って、 $3/4$ よりも小さいところで適切性を証明するためには、improved Strichartz評価よりも強力な道具を用いることが必要である。あるいは、 $3/4$ という仮定が適切性の成立のために本質的に必要であり、この値よりも小さい場合に初期値問題が非適切になるという可能性ももちろんある。この辺りのことをはっきりさせるのが今後の研究課題である。

なお、残りの進行中の研究は、年内を目処に論文としてまとめ公表したいと考えている。論文に加え、日本数学会での発表なども積極的に行なっていきたい。

7 本プログラムに採用されたことで得られたこと (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

本プログラムに採用されたことで非常に多くのものを得ることができた。それらは、直接研究に関わるもののみならず、生活面や研究者のネットワークなど多岐にわたる。

初めに、非線形分散型方程式に対する初期値問題の適切性の分野をリードしてきたMolinet氏と共同研究できたのは、非常に貴重な経験となった。最先端の研究手法を習得できただけでなく、Molinet氏の数学あるいは研究に対する姿勢、問題にぶつかった時にどのように考え方をシフトさせるのかを間近で見ることができたのは、今後研究を続けていく上で大きな糧となると考える。また、分かっていると思っていた標準的な手法を更に深く理解するきっかけを何度も持つことができた。渡航開始直後にはツール大学のセミナーで発表する機会を得ることができた。

生活面では、渡航する前からある程度は覚悟していたが、渡航後1ヶ月もしないうちにフランス全土でロックダウンが敷かれ、自由に移動することが困難となった。フランスではロックダウンと社会保障はセットになっていて、お願いベースの日本の方針と対照的であった。また、フランスでの報道を耳にする中で、フランス的な視点を知ることができた。

ワクチン接種が行き渡り、5月ごろからフランスの経済活動が段階的に再開した。渡航の最終盤にパリで開催されたハイブリッド型の研究集会に参加し、フランスの数学者と交流することができた。また、ヨーロッパ域内を中心に様々な研究集会に参加し、情報収集を行った。オンラインで開催であったとしても、日本からの参加は時差を考慮する必要があるため、フランスにいることを生かせたと考える。