ウェブサイト公開用

（様式 10）

（海外特別研究員事業）

令和 3 年 5 月 1 日

海 外 特 別 研 究 員 最 終 報 告 書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

採 用 年 度 平成３１年度

受 付 番 号 201960380

氏 名 元良直輝

（氏名は必ず自署すること）

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。

なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地（派遣先国名）用務地： アルバータ （国名： カナダ ）

2. 研究課題名（和文）※研究課題名は申請時のものと違わないように記載すること。

W 代数と量子幾何学的 Langlands 対応に関する研究

3. 派遣期間：平成 31 年 4 月 21 日 ～ 令和 3 年 4 月 1 日

4. 受入機関名及び部局名

受入機関名： University of Alberta

部局名： Department of Mathematical and Statistical Sciences

5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意 **書式任意（A4 判相当 3 ページ以上、英語で記入も可）**

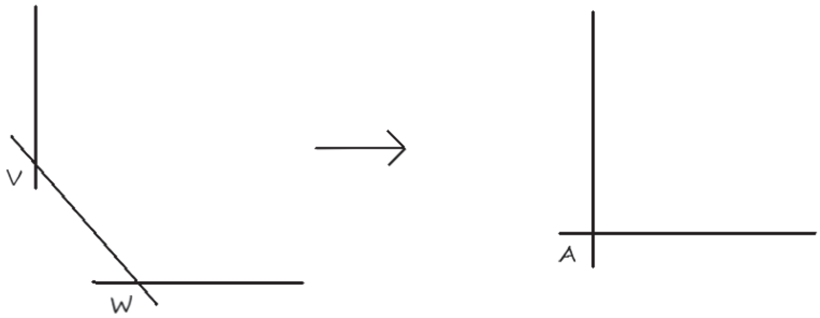
（研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等）

（注）「6. 研究発表」以降については様式 10－別紙 1～4 に記入の上、併せて提出すること。

本研究は W 代数の構造・表現論および幾何学的表現論を通して，量子幾何学的 Langlands 予想の完全な理解を目指すものである．W 代数の構造や表現論は，主べき零元に付随する W 代数（＝主 W 代数）や極小べき零元に付随する W 代数などといった特別なクラスではよく知られているが，一般の場合にはほとんど何もわかっていない．報告者は，自身の開発した W 代数のスクリーニング作用素を用いた自由場表示を用いて，近年進展している$\mathcal{N}=2$の 4 次元超対称ゲージ理論と 2 次元共形場理論の間の対称性に基づく W 代数に関する予想を解決することで，W 代数の研究に着手していくとともに，量子幾何学的 Langlands 予想との関連を探求している．

１．W 代数のコセット構成に関する研究

Witten によれば，理論物理的な解釈では量子幾何学的 Langlands 対応は 4 次元ゲージ理論における境界条件たちのなす圏の間の S 双対性によって表現される．Creutzig-Gaiotto らは Witten の考えをより一般的な場合に推し進めることで，3 次元多様体である境界同士の交わりに生じる 2 次元共形場理論に付随する頂点代数の間の対称性を S 双対性で統制できることを観察した．例えば以下の図の左のように 3 つの境界条件が存在し，交わりに付随する頂点代数をVとWとする．この時，真ん中の境界を縮約して 2 つの境界条件の交わりとしたとき（下の図の右），付随する頂点代数Aはテンソル頂点代数$V \otimes W$の拡大であることが期待される．



すなわち，Vの表現V_λおよびWの表現W_λたちが存在して

$$A=\bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes W_\lambda$$

なる$V \otimes W$-加群としてのAの分解が存在する．したがって

$$V=\mathrm{Com}(W,A)$$

が成立し，VおよびWのコセット構成が導かれる．一方で S 双対性とはVとWの立場を入れ替えることであり，これによってVおよびWに関する非自明な同型が得られる．以上の観察の中で境界条件を入れ替えることで様々な W 代数に関するコセット構成に関する予想が生まれた．この予想にはすでに知られている Feigin-Frenkel 双対性や，最近になって証明された ADE 型の主 W 代数の Arakawa-Creutig-Linshaw によるコセット構成が含まれている．報告者は，以上の文脈の中で生まれた未解決の W 代数のコセット予想に関する問題を解決した．

（ｉ）$\mathfrak{osp}(1|2n)$に付随する主 W 代数のコセット構成

$\mathfrak{osp}(1|2n)$に付随する主 W 代数は，$n=1$の場合$\mathcal{N}=1$スーパーVirasoro 代数，一般のnでは Fateev-Lukyanov のWB_n代数と呼ばれ，数学だけでなく理論物理でも重要な代数の族である．ところがその表現論は$n=1$の場合を除いてほとんど知られていない．Arakawa-Creutig-Linshaw は ADE 型の主 W 代数をコセット構成を用いて表現論を解析したが，報告者はその類似の手段をとるために次のようなコセット構成を証明した：

$$\mathcal{W}^{\ell}\big(\mathfrak{osp}(1|2n)\big)=\mathrm{Com}\Big(V^{k}(\mathfrak{so}_{2n+1}),V^{k-1}(\mathfrak{so}_{2n+1})\otimes F(2n+1)\Big)$$

ただし$\mathcal{W}^{\ell}\big(\mathfrak{osp}(1|2n)\big)$は$\mathfrak{osp}(1|2n)$に付随する主 W 代数，$V^{k}(\mathfrak{so}_{2n+1})$は$\mathfrak{so}_{2n+1}$に付随するアファイン頂点代数であり，$\ell$と$k$はそれぞれのレベルで，

$$\frac{1}{k+2n-1}+\frac{1}{2\ell+2n+1}=1$$

なる関係式を満たしており，$F(2n+1)$は自由 fermion 頂点代数の$2n+1$個のテンソル積である．

また報告者はこの方向性をさらに推し進めて，$\mathcal{W}^{\ell}\big(\mathfrak{osp}(1|2n)\big)$の表現論の解析へと応用した．$\mathcal{W}^{\ell}\big(\mathfrak{osp}(1|2n)\big)$の既約表現はその Zhu 代数の既約表現を知ることで分類できるが，報告者はそれが基本的には$\mathfrak{osp}(1|2n)$の普遍包絡環の中心からなることを証明し，したがって Harish-Chandra 射を介して中心指標を用いて分類できることが分かる．その下で，$V^{k-1}(\mathfrak{so}_{2n+1})\otimes F(2n+1)$を$\mathcal{W}^{\ell}\big(\mathfrak{osp}(1|2n)\big)\otimes V^{k}(\mathfrak{so}_{2n+1})$加群として分解したときにどのような表現が分岐として現れるかを解析した．同様の問題を両辺の単純商をとっても可能であると考えられ，Thomas Creutzig 氏との新しい共同研究につながった．

（ⅱ）Gaiotto-Rapcak 予想の部分的解決

A 型の W 代数に関するコセット構成は Gaiotto-Rapcak らによって詳しい予想が立てられており，報告者は Thomas Creutzig 氏と Shigenori Nakatsuka 氏と協力して以下のような結果を証明し，予想を部分的に解決した：

$$\mathrm{Com}(\mathcal{H}, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})) = \mathrm{Com}\left(\mathcal{H}, \mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)\right)$$
$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) = \mathrm{Com}\left(\mathcal{H}, \mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}\right)$$
$$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right) = \mathrm{Com}(\mathcal{H}, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}})$$

ただし$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$は$\mathfrak{sl}_n$の副正則べき零元に付随する W 代数，$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)$は$\mathfrak{sl}(n|1)$に付随する主 W 代数であり， kと ℓは

$$(k+\mathrm{n})(\ell+\mathrm{n}-1) = 1$$

なる関係式を満たしており，$\mathcal{H}$はランク 1 の Heisenberg 頂点代数，V_Lは格子Lに付随する格子頂点代数を表す．これによって 2 つの W 代数$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$と$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)$の間の双対性が明らかになった．これらの結果は Gaiotto-Rapcak らによって予想されていたが未解決の問題だった．また，類似の結果が$\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n+1}, f_{\mathrm{sub}})$と$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{osp}(2|2n)\right)$に対しても成り立つことがわかり，この 2 つの W 代数の間にも双対性があることがわかった．さらに，以上の結果の両辺の単純商をとることで，Arakawa-vanEkeren の結果と組み合わせて，$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)$や$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{osp}(2|2n)\right)$の単純商をとったものが，非退化許容レベルなる$\ell$に対して$C_2$有限性や有理性といった表現圏の構造に関わる特別な性質を満たすことを証明した．

また，以上の研究チームに Ryo Sato 氏を加えたことで，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$と$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)$の間の双対性についてさらに詳細な結果を得られた．具体的には，（１）相対半無限コホモロジーによる$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$および$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)$の表現の双対的構成，（２）相対半無限コホモロジーの誘導するコホモロジー関手とコセット構成の誘導する関手の同値性，（３）kおよびℓがともに非退化許容レベルなる特別な場合に，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$と$\mathcal{W}^\ell\left(\mathfrak{sl}(n|1)\right)$の単純商の表現たちのなすフュージョン圏の間のレベルランク双対性への応用などである．中でも相対半無限コホモロジー関手はある種の加法性の公理を満たしており，特に双対の関係にある 2 つの W 代数の表現の間の交絡作用素たちのなす空間の間の同型を誘導している．これから，相対半無限コホモロジー関手は両者の共形ブロックの間の対応を誘導していることが期待され，より一般に Gaiotto-Rapcak 予想に現れる W 代数たちの間の共形ブロックの間の対応を相対半無限コホモロジー関手によって解析できる可能性がでてきた．これは新しい発見であるとともに，我々の相対半無限コホモロジー関手の研究が重要な例となっており，より一般の W 代数の共形ブロックの双対性に関する研究の道が拓かれた．

（ⅲ）BC 型の主 W 代数のコセット構成

$\mathfrak{so}_{2n+1}$に付随する主 W 代数は Feigin-Frenkel 双対性によって$\mathfrak{sp}_{2n}$に付随する主 W 代数と同型になり，これらをまとめて BC 型の主 W 代数と呼ぶ．Creitzig-Gaiotto によって次のようなコセット構成が予想されていた：

$$\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sp}_{2n}) = \mathrm{Com}\left(V^k(\mathfrak{sp}_{2n}), V^k\left(\mathfrak{osp}(1|2n)\right)\right)$$

ただしkと ℓは

$$\frac{1}{k+n+1} + \frac{1}{\ell+\mathrm{n}+1} = 2$$

の関係式を満たしている．報告者は Thomas Creutzig 氏と協力してこの同型を証明した．証明は ADE 型の主 W 代数の Arakawa-Creutig-Linshaw によるコセット構成の証明方法に従った．その際に$V^k\left(\mathfrak{osp}(1|2n)\right)$の脇本表現なるものが技術的に必要であったが，Nakatsuka Shigenori 氏との協力で，より一般に任意の basic classical なスーパーLie 代数$\mathfrak{g}$に対して，$V^k(\mathfrak{g})$の脇本表現が構成できることがわかり，その結果を組み合わせることで証明に成功した．同様の構成が，最近の Creutzig-Linshaw らの研究から D 型やスーパーの BCD 型を含む形で，いくつも存在することが分かっており，$V^k(\mathfrak{g})$の脇本表現を用いることで解決できる．

２．Argyres-Douglass 理論に現れる W 代数の研究

C_2有限だが有理的でない頂点代数は，表現圏が半単純ではないのにも関わらず表現の character たちのなす空間が$SL(2,\mathbb{Z})$不変であることから，対数的共形場理論の候補として近年注目を集めている．C_2有限だが有理的でない頂点代数の例として有名なものにトリプレット代数があるが，これはダブレット代

数$A^{(p)}$と呼ばれる代数の$\mathbb{Z}_2$不変部分代数として定義される．Thomas Creutzig 氏はダブレット代数$A^{(p)}$が特別な２つの境界条件の間に現れる頂点代数のある極限$V^{(p)}$の Drinfeld-Sokolov コホモロジーとして導出され，その代数$V^{(p)}$は$\mathfrak{sl}_2 \otimes V^k(\mathfrak{sl}_2)$（$k = -2 + \frac{1}{p}$，$p$は２以上の自然数）の拡大となることを予想した：

$$H^0_{DS}(V^{(p)}) = A^{(p)}, \qquad V^{(p)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \rho_n \otimes \mathcal{L}_n^{(p)}$$

ただしρ_n，$\mathcal{L}_n^{(p)}$はそれぞれ$\mathfrak{sl}_2$，$V^k(\mathfrak{sl}_2)$の最高ウェイトがnとなる単純な最高ウェイト表現である．報告者は，Thomas Creutzig 氏，Drazen Adamovic 氏および Jinwei Yang 氏らと協力してこれらの予想を証明した．系として$A^{(p)}$代数および$V^{(p)}$代数のスクリーニング作用素による自由場表示を得ることもできた．

Argyres-Douglass 理論によれば，C_2有限だが有理的でない頂点代数の候補として$B^{(p)}$代数および$R^{(p)}$代数があるが，Thomas Creutzig 氏は$B^{(p)}$代数と$R^{(p)}$代数に対しても類似の主張が成り立つことを予想した．すなわち，$B^{(p)}$代数が$R^{(p)}$代数の Drinfeld-Sokolov コホモロジーとして導出され，$R^{(p)}$代数は$\mathcal{H} \otimes V^k(\mathfrak{sl}_2)$（$\mathcal{H}$はランク１の Heisenberg 頂点代数）の拡大となることを予想した：

$$H^0_{DS}(R^{(p)}) = B^{(p)}, \qquad R^{(p)} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(1,\ell) \otimes \mathcal{L}^{(p)}_{|\ell|+2n}$$

ただし$M(1,\ell)$は$\mathcal{H}$の最高ウェイトℓの最高ウェイト表現である．また$B^{(p)}$代数，$R^{(p)}$代数がそれぞれ$\mathfrak{sl}_{p-1}$の副正則べき零元に付随する W 代数の単純商，$\mathfrak{sl}_{p+1}$の Jordan ブロックが分割$(p,1,1)$に対応するべき零元に付随する W 代数の単純商となること，さらに$B^{(p)}$代数，$R^{(p)}$代数がそれぞれ Argyres-Douglass 理論における(A_1, A_{2p-3})型のカイラル代数，(A_1, D_{2p})型のカイラル代数となることまで予想した．報告者らはこれらの予想すべてを証明し，Creutzig 氏の予想を完全に解決した．系として$B^{(p)}$代数と$R^{(p)}$代数のスクリーニング作用素による自由場表示を得るとともに，

$$B^{(p)} = \left(A^{(p)} \otimes V_{\sqrt{-p/2}\mathbb{Z}}\right)^{U(1)}, \quad R^{(p)} = \left(V^{(p)} \otimes V_{\sqrt{-p/2}\mathbb{Z}}\right)^{U(1)}$$

といった$A^{(p)}$代数，$V^{(p)}$代数，$B^{(p)}$代数，$R^{(p)}$代数の間の関係式も得られた．

以上の結果は$A^{(p)}$代数，$V^{(p)}$代数，$B^{(p)}$代数，$R^{(p)}$代数が対数的共形場理論の研究において重要な例を与えてくれることを示唆するとともに，その表現圏の構造が頂点代数の拡大の理論から制御できること，そして互いに密接に関わりあっていることを意味している．報告者らはこれらの結果をもとに，$A^{(p)}$代数，$V^{(p)}$代数，$B^{(p)}$代数，$R^{(p)}$代数の表現の研究を対数的共形場理論との関連を探りながら進めている．

３．Ribault-Teschner 関係の A 型 W 代数への一般化

アファイン頂点代数$V^k(\mathfrak{sl}_2)$の Drinfeld-Sokolov コホモロジーをとると Virasoro 頂点代数が得られるが，この対応を相関関数にまで広げることで$V^k(\mathfrak{sl}_2)$の相関関数から Virasoro 頂点代数の相関関数を得ることができる．これを Ribault-Teschner 関係と呼ぶ．この関係は経路積分を用いても同じ結果が得られることが分かっており，経路積分を用いた手法をアファイン頂点代数$V^k(\mathfrak{sl}_n)$とそれに Drinfeld-Sokolov コホモロジーをとることで得られる W 代数たちに対して適用することで，Ribault-Teschner 関係の A 型 W 代数への一般化が得られることが期待される．報告者および Thomas Creutzig 氏，Yasuaki Hikida 氏，Tianshu Liu 氏はこの予想が正しいことを$\mathfrak{sl}_3$と$\mathfrak{sl}_4$の場合に証明した．$\mathfrak{sl}_3$の場合には下図のように，アファイン頂点代数$V^k(\mathfrak{sl}_3)$から$\mathfrak{sl}_3$の副正則べき零元に付随する W 代数，そして$\mathfrak{sl}_3$に付随する主 W 代数という順に相関関数が得られることが分かった．

$$V^k(\mathfrak{sl}_3) \quad \to \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, f_{\mathrm{sub}}) \quad \to \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3)$$

$\mathfrak{sl}_4$の場合にはより複雑で，アファイン頂点代数$V^k(\mathfrak{sl}_4)$から$\mathfrak{sl}_4$の極小べき零元に付随する W 代数，次に$\mathfrak{sl}_4$の副正則べき零元に付随する W 代数を介して，最後に$\mathfrak{sl}_4$の主 W 代数という順に相関関数が得られていく．ことが分かった．一般には，長方形型の$\mathfrak{sl}_n$のべき零元に付随する W 代数の場合に段階的還元を行うことで上記の対応の一般化が得られることが予想され，新しい研究につながっている．

研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況

(1)　学会誌等への発表（著者、発表論文名、学会誌名、発表年月巻号等）

1. Thomas Creutzig, Naoki Genra and Shigenori Nakatsuka, "Duality of subregular W-algebras and principal W-superalgebras", Adv. Math., 383, 107685 (2021).

2. Drazen Adamović, Thomas Creutzig, Naoki Genra and Jinwei Yang, "The vertex algebras R(p) and V(p)", Comm. Math. Phys., 383, no.2, 1207–1241 (2021).

3. Thomas Creutzig, Naoki Genra, Yasuaki Hikida and Tianshu Liu , "Correspondences among CFTs with different W-algebra symmetry", Nucl. Phys., B 957, 115104 (2020).

4. Naoki Genra , "Screening operators and Parabolic inductions for Affine W-algebras", Adv. Math., 369, 107179 (2020).

5. Naoki Genra and Toshiro Kuwabara, "Strong generators of the subregular W-algebra W^{K-N}(sl_N, f_sub) and combinatorial description at critical level", Lett. Math. Phys., 110, 21–41 (2020).

(2)　学会発表（学会名、発表題目名、口頭・ポスター等の形式、発表年月日等）

1. Rocky Mountain Representation Theory Seminar, "Screenings and applications", 口頭発表, University of Colorado (Zoom), October 15, 2020.

2. RIMS conference: Recent advances in combinatorial representation theory, "New Duality in W-algebras", 口頭発表, RIMS (Zoom), Japan, October 5, 2020.

3. Joint Mathematics Meetings 2020 AMS Special Session on Mathematical Aspects of Conformal Field Theory, "New Duality in W-algebras", 口頭発表, Colorado Convention Center, USA, January 18, 2020.

4. Modern perspectives of VOAs II, "Triality of W-algebras", 口頭発表, University of Alberta, Canada, November 14, 2019.

5. The Mathematical Foundations of Conformal Field Theory and Related Topics, A conference in honor of Yi-Zhi Huang, "Coset constructions for W-algebras for type B", 口頭発表, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, China, June 13, 2019.

6. Modern perspectives of VOAs I, "Coset construction of W-algebras and Wakimoto representations", 口頭発表, University of Alberta, Canada, May 2, 2019.