

令和 3 年 4 月 6 日

海外特別研究員最終報告書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

採用年度 2019

受付番号 201960182

氏 名 松澤陽介

(氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。

なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地（派遣先国名）用務地：Brown University (国名：アメリカ合衆国)
2. 研究課題名（和文）※研究課題名は申請時のものと違わないように記載すること。
代数多様体の複素系の数論
3. 派遣期間：平成・令和 1 年 9 月 3 日 ~ 令和 3 年 3 月 31 日
4. 受入機関名及び部局名
受入機関名：Brown University
部局名：Department of Mathematics.
5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意 **書式任意 (A4 判相当 3 ページ以上、英語で記入も可)**
(研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等)
(注)「6. 研究発表」以降については様式 10-別紙 1~4 に記入の上、併せて提出すること。

研究集会への参加やセミナー発表が多数予定されていたが、パンデミックの影響で多くがキャンセルになった。オンラインセミナーに毎週定期的に参加し、オンラインでの研究集会にもいくつか参加した。

派遣期間中、以下の研究を行った。

- (1) 有理数体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された射影多様体 X の自己射 $f: X \rightarrow X$ に対して Kawaguchi-Silverman 予想と言うものがある。

Conjecture 0.1 (Kawaguchi-Silverman conjecture (KSC)). 点 $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ が *Zariski* 稠密軌道を持つとき、算術次数

$$\alpha_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_H(f^n(x))^{1/n}$$

は f の力学次数 δ_f に一致する。ここで、 h_H は X 上の豊富因子 H に付随する *Weil* 高さ関数であり、力学次数とは f の幾何的な複雑さを測る不変量である。

この予想は例えば、 f が *Zariski* 稠密軌道を持たないときは意味を持たない。また、各軌道に注目した問題なので、大域的な問題ではない。そこで Meng, Shibata, Zhang との共同研究で、以下の予想を定式化した。

Conjecture 0.2 (Small arithmetic non-density (sAND)). 代数体 K 上定義された射影代数多様体 X と自己射 $f: X \rightarrow X$ を考える。 $d \geq 1$ を任意の整数とする。このとき集合

$$\{x \in X(L) \mid L \text{ は } K \text{ の } d \text{ 次拡大, } \alpha_f(x) < \delta_f\}$$

は X で *Zariski* 稠密ではない。

まず、sAND は KSC を導く。我々は、sAND をいくつかの場合に成立することを確認した。例えば、曲面の場合、アーベル多様体の場合、Mori dream space の場合、Hyper Kahler 多様体の場合などである。

またこの予想の相対版も定式化した。つまり、自己射の族に対しても同様のことが期待できるというものである。この場合、アーベル多様体の自己射の族の場合に、この予想をアーベル多様体のトーション点の一樣有界性予想から導いた。また相対版 sAND と力学系の preperiodic points の一樣有界性予想とが同値であることを示した。

- (2) 上記の予想 sAND は KSC よりも強いものであった。逆に関して、つまり KSC から sAND が従うかという問題が考えられる。実はいくつかの力学系に関する一樣性が成立すると、KSC から sAND が従うことがわかっている。その中の一つの問題について、Meng, Shibata, Zhang, Zhong らと研究した。具体的には射影多様体 X の自己射 $f: X \rightarrow X$ について、 X の部分多様体 V であって f -periodic with period r であり f^r の V への制限の力学次数が δ_f^r より真に小さなものの個数について研究した。このようなものの中で極大なものの全体を S_{f^∞} とし、その中で f -invariant

なものを S_f と書く．また f -invariant かつ $\dim V = \dim X - 1$ なものからなる集合を P_f と書く．このとき， S_f が有限だというのが予想である．我々は， P_f が有限であることを一般に示した． S_f に関しては特別な場合に有限性を示した．また，以下のような漸近的評価も示した．

$$P_{f^n} \leq \delta_f^n (1 + o(1)).$$

S_{f^n} についても， X が代数群で f が group hom と translation の合成の場合等に

$$S_{f^n} \leq \delta_f^{n \dim X} (1 + o(1))$$

という評価を示した．

- (3) KSC を研究する際，自己射や多様体の幾何から来る条件から考えるべきケースを絞れる場合が多くある．そのような際に使える可能性のあるいくつかの事実を示し，まとめた．例えば，自己同型 $f: X \rightarrow X$ の場合には， $N^1(X)$ への作用 f^* と $(f^{-1})^*$ の leading eigenvector D_+ , D_- を考えることが様々なシチュエーションで利用されてきた．私は $D_+ + D_-$ が相異なる二つの有効 $\mathbb{R}$ 因子と $\mathbb{R}$ -線形同値ならば，KSC が示せることを示した．これはこれまでのこのような手法の総括とも言える．また例えば，射影空間の上のベクトル束の自己射の KSC を示した．これはベクトル束の自己射の幾何についての比較的新しい結果や，私の去年の論文の結果などを組み合わせると示せるというものである．
- (4) 自己射の軌道に沿った，局所高さ関数や部分多様体に付随する高さ関数の増大について詳しく研究した．

$Y \subset X$ を部分多様体とする．まず局所高さ関数

$$\lambda_{Y,v} = -\log(v\text{-adic distance from } Y)$$

の増大についてであるが， Y が因子の場合などはこれを知ることが軌道の整数点の様子を知ることにつながる．一方 Y の codimension が高い場合は，基本的には局所高さ及び大域高さ

$$h_Y = \sum_v \lambda_{Y,v}$$

は豊富因子に付随する高さに比べて真に遅くしか増大しないことが期待できる．これは私が数年前から考えていた問題であるのだが，ここ数ヶ月で大きな進展があった．

まず， Y が 0 次元の場合，つまり有限集合の場合，自己射の分岐などに関する適切な幾何的な仮定の元，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{Y,v}(f^n(x))}{h_H(f^n(x))} = 0$$

となることを示した．これは期待通りの結果であり，数論力学系の今後の研究で重要な役割を果たす可能性がある．また Y が任意次元の場合に同様のことを Vojta 予想を仮定して証明した． Y が codimension 1 の場合にはこれは軌道の整数点の Zariski

non density や Dynamical Lang-Siegel 予想と呼ばれる予想をほぼ導く。

一方大域高さ h_Y についてであるが, これに対しても Y の codimension が 2 以上で f^n の Y での分岐の様子が漸近的に悪くなければ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_Y(f^n(x))}{h_H(f^n(x))} = 0$$

が期待されている。これは非常にデリケートな数論的問題であり, 例えば特殊な場合として Carvaja-Zannier の定理を導くことが知られていた。またこの予想は $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ の自己射に対する Dynamical Mordell-Lang 予想を導く。さらに, そのほか様々な高次元数論力学系での応用が期待される。私はまずどのような場合に正確に上記のことが期待できるのかを, Y の f による逆軌道がどれくらい f の分岐因子と交わるかを測る量 $e(Y)$ を導入し明らかにした。

Conjecture 0.3. $e(Y) < \alpha_f(x)$ かつ x の f -軌道が Zariski 稠密ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_Y(f^n(x))}{h_H(f^n(x))} = 0.$$

この予想が, やはり Vojta 予想を仮定すれば generic な軌道に対してはこれが正しいことを示した。

この予想のさらなる応用として, primitive prime divisor に関する問題を研究した。一般に primitive prime divisor とは, 数列 $(a_n)_n$ に対して定義される以下のもののことである。第 n 項 a_n の primitive prime divisor とは素数 p であって, a_n を割り切り, 任意の a_m , $m < n$ を割り切らないもののことである。数論力学系の設定では以下のように一般化することができる。軌道 $(f^n(x))_n$ について, $f^n(x)$ の primitive prime divisor とは代数体 K の non-archimedean absolute value v であって, $\lambda_{D,v}(f^n(x)) > 0$ かつ $\lambda_{D,v}(f^m(x)) \leq 0$, $m < n$ なるもののことである。例えば, $X = \mathbb{P}^N$ で $D = (x_0 = 0)$, $K = \mathbb{Q}$ の場合, 軌道を $f^n(x) = (a_0(n) : \dots : a_N)$ と coprime integer による homogeneous coordinate で書くと, 数論力学系の設定での primitive prime divisor は数列 $(a_0(n))_n$ の primitive prime divisor の概念と一致する。一般に, 自明な理由がない限り primitive prime divisor は存在するということが期待されている。私は Vojta 予想のもと, いくつかの純粹に幾何的な仮定によって自明な理由を排除すれば, primitive prime divisor が存在することを示した。

Theorem 0.4. Vojta 予想を仮定する。 D は豊富な有効因子で $(f^i)^*D \cap D$ は codimension 2 以上だとする。さらに $e(D) < \alpha_f(x)$ だとする。 S を代数体 K の absolute values の有限集合

で, *archimedean* なものを全て含むものとする. このとき

$$\left\{ f^n(x) \mid \begin{array}{l} f^n(x) \text{ does not have primitive prime divisors} \\ \text{outside } S \text{ with respect to } D \end{array} \right\}$$

は *Zariski* 稠密ではない.

- (5) Meng, Shibata, Zhang との共同研究中に以下の問題 (予想) が提唱された.

Conjecture 0.5. $f: X \rightarrow X$ を代数体 K 上の射影多様体の自己全射だとする. $Y \subset X$ を部分多様体で $f(Y) = Y$ なるものとする. このとき, ある整数 $r \geq 0$ が存在し, 以下が成立する: $x \in X(K)$ がある整数 $n \geq 0$ に対して

$$f^n(x) \in Y$$

を満たすならば, $f^r(x) \in Y$ が成立する.

この予想に関しては現在も進行中だが, 派遣期間中に以下の結果を得た.

- f が *etale* 射の場合は予想は正しい.
- f の Y への制限 $f|_Y: Y \rightarrow Y$ が *etale* の場合も予想は正しい.
- 上記二つのケースでは, K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体で X, f が *good reduction* を持つ場合にも予想は正しい.
- 一般には K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体だと予想には反例がある (X が射影平面で反例を構成した).
- X が射影的ではない場合は, 予想には反例がある.

この予想の特別な場合として, 多様体の自分自身との直積と対角部分集合を考えると以下の予想を得る.

Conjecture 0.6. $f: X \rightarrow X$ を代数体 K 上の射影多様体の自己全射だとする. このとき, ある整数 $r \geq 0$ が存在し, 以下が成立する: $x, y \in X(K)$ がある整数 $n \geq 0$ に対して

$$f^n(x) = f^n(y)$$

を満たすならば, $f^r(x) = f^r(y)$ が成立する.

これはすでに有理点と自己射に関する興味深い問題であり, $X = \mathbb{P}^1$ の場合でさえ非自明だったがこの場合には Bell, Satriano との現在進行中の共同研究で証明することができた.