

令和 3 年 4 月 23 日

海外特別研究員最終報告書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

採用年度 平成 31 年度

受付番号 201960163

氏名 遠藤直樹

(氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。

なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地 (派遣先国名) 用務地: インディアナ州 (国名: 米国)

2. 研究課題名 (和文) ※研究課題名は申請時のものと変わらないように記載すること。

Blow-up 代数の可換環論

3. 派遣期間: 令和 2 年 2 月 29 日 ~ 令和 3 年 3 月 27 日

4. 受入機関名及び部局名

受入機関名: Purdue University

部局名: Department of Mathematics

5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意 **書式任意 (A4 判相当 3 ページ以上、英語で記入も可)**

(研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等)

(注) 「6. 研究発表」以降については様式 10-別紙 1~4 に記入の上、併せて提出すること。

海外特別研究員 最終報告書

所期の目的の遂行状況及び成果

採用年度 平成 31 年度

受付番号 201960163

遠藤 直樹

■ 研究の背景

私の専門分野は代数学（可換環論）です。可換環論は、19 世紀末、D. Hilbert により創始され、E. Noether による代数学の抽象化の中で独立した分野として確立しました。20 世紀中頃、J.-P. Serre が可換環論に homology 代数を導入し、飛躍的な発展を遂げ、20 世紀から 21 世紀に及ぶ 60 年間に、代数幾何学、特異点論、整数論、不変式論、組合せ論など、関連分野との間で問題と手法を享受・提供しつつ、一連の homological 予想の解決や正標数代数系の構築を含めて、Cohen-Macaulay 環解析を中心課題に発展・成熟しています。現在では、可換環論は手法を hyper-homology 代数へと拡張し、部分圏の分類など表現論を中心に、代数学諸分野における基本言語の一つであるだけでなく、物理学や統計学とも密接に関連しながら発展を続けています。特に最近、Perfectoid 幾何学の理論を用いて、直和因子予想や big CM 予想、単項式予想といった重要な未解決問題が解決されるなど、可換環論に大きな進展が齎されています。このように関連分野との関わりの中で発展している可換環論の研究領域は広範囲に及びますが、その中でも本研究の目的は「**blow-up 代数の環構造解析**」にあります。

可換環 A 内のイデアル I に対して、 $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ と定め、 I の Rees 代数と呼びます。Rees 代数をはじめとする拡大 Rees 代数 $\mathcal{R}'(I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n$ 、随伴次数環 $G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$ など、イデアルに付随する一連の可換環は、**blow-up 代数**と呼ばれ、特異点解消に密接に関連し、これまでに幾何学的側面から深い研究が行われています。一方、blow-up 代数の環構造論の原点は、1970 年代末の後藤四郎-下田保博による Rees 代数の Cohen-Macaulay 性解析に遡ります。論文 [4] では、Cohen-Macaulay 局所環 (A, \mathfrak{m}) 内の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対して、 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性が $G(I)$ の Cohen-Macaulay 性とその a -不変量の挙動によって記述されることが示されています。この定理は、その後の N. V. Trung-池田信、後藤四郎-西田康二による一般のイデアルやイデアルの filtration に関する定理への拡張の指針となった重要な結果です。Blow-up 代数は、行列式環や代数群の不変式環、Segre 積など様々な場面に現れ、有理特異点やイデアル冪の漸近挙動、Briançon-Skoda の定理、環とイデアルの整閉包、重複度の理論、イデアルのシンボリック冪など数多くの重要な概念と密接な繋がりを持ちます。これらの事実から、blow-up 代数の環構造解析は、可換環論に限らず、代数幾何学や特異点論、組合せ論、不変式論など関連分野への波及効果も期待できます。

■ 研究実施状況

本派遣期間中、当初は受入研究機関である Purdue 大学数学科において、ご提供いただいた研究室に出勤し、受入研究者と共に研究活動を行う予定でしたが、渡米後、直ちに新型コロナ

新型コロナウイルス感染症拡大の影響を受け、Purdue 大学のキャンパスが全面的に封鎖されることとなりました。この不測の事態に伴い、研究活動は基本的に自宅で行い、適宜、Zoom や Skype 等のオンラインツールや email を用いて受入研究者や共同研究者との議論を継続しました。

上記の研究の背景を踏まえ、今回の海外特別研究員としての海外派遣においては、blow-up 代数の可換環論を軸に据え、研究活動に邁進することを計画しておりました。より具体的な課題としては、下記 2 課題

- (1) Blow-up 代数の almost Gorenstein 性解析
- (2) Blow-up 代数の Buchsbaum 性解析

に従事する計画でした。実際には、研究の進捗状況や新型コロナウイルス感染症拡大の影響等を鑑み、これらに加えて、下記の課題

- (3) Arf 環と Zariski 予想の解析

にも従事しました。以下、上記の課題に対する研究の実施状況と成果を報告いたします。

(1) は、受入研究者である Purdue 大学の Bernd Ulrich 教授と、同大学大学院生との共同研究として実施しました。目標は、加群の Rees 代数の almost Gorenstein 性の判定条件を確立することです。(1) では、まず具体的な問いとして、体上の多項式環の有限生成次数付き加群の Rees 代数がいつ almost Gorenstein であるかを考察しました。この問いは、加群の Rees 代数がいつ極小重複度を持つかという問いに帰着され、私は Rees 代数が極小重複度を持つための必要条件を与えました。十分条件に関しても、部分的な成果が得られています。今後も共同研究を継続し、成果の公表を目指します。

(2) に関して、Cohen-Macaulay 環論の深化・発展には、その背後を形成する非 Cohen-Macaulay 環の理論の充実が不可欠です。Buchsbaum 環はこの視点から導入された Cohen-Macaulay 環の拡張概念です。Rees 代数の Buchsbaum 性に関して、私は加群に対する Ratliff-Rush 閉包の理論を導入し、Ratliff-Rush 閉包が整閉包に一致する条件を Rees 代数の(局所的な)正規性により記述することにより、Rees 代数の Buchsbaum 性に関する特徴付けを与えることに成功しました。得られた成果は論文に纏め、既に掲載されています(論文[2])。

(3) は、West Virginia 大学の Ela Celikbas 助教、Olgur Celikbas 助教、North Dakota 州立大学の Cătălin Ciuperca 准教授の 3 名の米国研究者に加えて、明治大学の後藤四郎名誉教授、松岡直之准教授、日本学術振興会特別研究員 PD の磯部遼太郎氏との共同研究です。(3) では、Arf 環の環構造解析に従事しました。整数論との深い関わりを持つ Arf 環論の起源は、1949 年の C. Arf による平面曲線の特異点の分類に遡ります。1971 年、J. Lipman は、C. Arf が考察した環の本質を抽出する形で、Arf 環を 1 次元 Cohen-Macaulay 半局所環に対して定義し、整閉イデアルの安定性による特徴付けを与えました(論文[5])。Arf 環は、局所化や多項式拡大など、環の基本操作との相性も良く、数多くの具体例を構成することができますが、その重要性の最たるものは、環の strict closed 性に関する O. Zariski の予想にあります。Zariski は、環が Arf であることと strictly closed であることが同値であると予想し、Arf 性が strict closed 性の必要条件であることを示しました。十分条件に関しては、Lipman が基礎環が体を含む場合に成立することを示していますが、私は最近、一般にその十分条件が成立する、即ち、Zariski 予想が一般に正しいことの証明に約 50 年越しに成功しました。当該論

文は現在, 投稿中の段階です (論文 [1])。この結果は, 環の strict closed 性が不変部分環に遺伝するなど, 数多くの応用を導きますが, 特筆すべきは, 任意の可換環に対して定義される strict closed 性を用いることで, Arf 環の概念の高次元化が可能である点にあります。私は今後, 高次元 Arf 環論とも言うべき Zariski 予想の同値性に対応する性質を内包した高次元の環構造論の構築に従事する計画です。この方面においても, 予備的研究を開始しており, 組合せ論的対象である Stanley-Reisner 環が Arf 環であることや blow-up 代数で Arf 環となるものの構成に成功しています (論文 [3])。

その他, West Virginia 大学の Ela Celikbas 助教, Tata Institute of Fundamental Research の Jai Laxmi 氏, Jagiellonian 大学の Jerzy Weyman 教授との対称行列の行列式環の almost Gorenstein 性に関する共同研究や Kansas 大学の Hailong Dao 教授との Gorenstein conductor に関する共同研究も並行して実施しています。

■ 関連する学会への参加状況等

新型コロナウイルス感染症拡大の影響により, 出席を予定していた国内外における各種学会や研究集会等は, その殆ど全てが中止・延期, またはオンラインでの開催となり, 対面での開催は困難なものとなりました。このように, 国内外への渡航を含め, 通常通りの活動が難しい状況ではありましたが, その中でも下記の学会・研究集会には参加し, 成果発表のため, 招待講演を行いました。

- (1) 可換環論オンラインワークショップ, Arf closure versus strict closure, Zoom, 2020年11月22日
- (2) AMS Fall Eastern Virtual Sectional Meeting, Special Session on Homological Methods in Algebra, Weakly Arf rings, Zoom (formerly at Pennsylvania State University (USA)), October 4th, 2020
- (3) AMS Spring Central Sectional Meeting, Special Session on Commutative Algebra and Connections with Algebraic Geometry, On weakly Arf rings, Purdue University (USA), April 5th, 2020

■ 参考文献

- [1] E. Celikbas, O. Celikbas, C. Ciupercă, N. Endo, S. Goto, R. Isobe, and N. Matsuoka, Weakly Arf rings, arXiv:2006.01330.
- [2] N. Endo, On Ratliff-Rush closure of modules, *Math. Scand.*, **126** (2020), no.2, 170–188
- [3] N. Endo and S. Goto, Construction of strictly closed rings, arXiv:2006.02892.
- [4] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, *Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979)*, 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **68**, Dekker, New York, 1982.
- [5] J. Lipman, Stable ideals and Arf rings, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 649–685.