

令和 3 年 7 月 8 日

海外特別研究員最終報告書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

採用年度 平成 30 年度

受付番号 201860674

氏 名 中塚 智之

(氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。

なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地(派遣先国名) 用務地: フレンスブルク (国名: ドイツ連邦共和国)

2. 研究課題名(和文) ※研究課題名は申請時のものと変わらないように記載すること。

基本解を用いた Navier-Stokes 方程式の時間周期問題の数学解析

3. 派遣期間 平成 令和 30 年 4 月 1 日 ~ 令和 3 年 5 月 31 日

4. 受入機関名及び部局名

受入機関名: Flensburg University of Applied Sciences

部局名: Department of Mechanical, Process Engineering and Maritime Technologies

5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意 書式任意(A4 判相当 3 ページ以上、英語で記入可)

(研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等)

(注)「6. 研究発表」以降については様式 10-別紙 1~4 に記入の上、併せて提出すること。

海外特別研究員としての派遣を通じて、私は Navier-Stokes 方程式の時間周期問題の新しい研究手法を習得し、それを応用して幾つかの研究成果を得ることができた。派遣期間中に私が遂行した研究は全空間と外部領域における Navier-Stokes 方程式の時間周期問題に関する

1. Stokes 基本解を用いた弱解の表現公式と、それに基づく減衰構造の解析
2. 速い各点減衰度を持った解の存在
3. 適当な Lebesgue 空間での解の存在

という研究課題から成る。以下に述べるように全空間における上記の課題については一定の研究成果を得ることができたが、外部領域においては全空間の場合には見られないような困難の為に望ましい結果を得ることは叶わなかった。これについては今後の課題として取り組んでいく所存である。

また、2 番目の課題について得られた研究成果は論文として学術雑誌に掲載され、研究集会などで発表する機会もあったが、それ以外の結果については論文としてまとめている最中であり、コロナ禍の影響もあってか研究集会などでの発表の機会には恵まれなかった。これらの成果も論文としてまとめた後に学術雑誌に投稿し、日本の学会などを中心に研究発表を行う予定である。

派遣中に得られた研究成果について述べる．以下では $n \geq 3$ として全空間 $\mathbb{R}^n$ における非圧縮粘性流体の時間周期的な運動を記述した Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla q = \operatorname{div} F & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ v(\cdot, x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty, \\ v(t, \cdot) = v(t + T, \cdot) & \text{for all } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

を考える．ここで v と q は速度ベクトルと圧力を表す未知関数， F は与えられた時間周期的なテンソルで $\operatorname{div} F$ により外力を表す．また， T を与えられた周期とする．

1 弱解の表現公式と減衰構造

Navier-Stokes 方程式の理論において， L^2 空間の枠組みを採用することで $F \in L^2_{per}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ が小さいことを仮定せずとも弱解 $v \in L^2_{per}(\mathbb{R}; \dot{H}^1_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n))$ を構成できることが知られている．しかし，この利点の代償として弱解の構成から解の挙動に関する情報はほとんど得られず，弱解の挙動は重要な未解決問題である．ここで L^p_{per} は T 周期関数からなる L^p 空間を表し， $C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ はコンパクトな台を持ち発散がゼロとなるような滑らかな関数の集合， $\dot{H}^1_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ を $C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ の Dirichlet norm に関する完備化で定義する．本研究ではこの未解決問題に対するアプローチの一つとして，与えられたデータ F が十分良いクラスに属していると仮定するが小さいことは仮定せず，弱解を Stokes 基本解を用いて表現し，その性質を用いて弱解がどのような減衰構造を持ち得るのかを調べた．

時間周期問題に関する Stokes 基本解の理論は Kyed(2016)，Eiter-Kyed(2018) により導入され，時間周期問題における Stokes 基本解 E は定常 Stokes 基本解 E_s と時間周期的な剰余 E_p の和として表される．このような基本解の構造とその理論を応用するにあたって，私は与えられた弱解 $v \in L^2_{per}(\mathbb{R}; \dot{H}^1_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n))$ を定常部分 $v_s \in \dot{H}^1_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ と purely periodic part(以下，純周期部分) $v_p \in L^\infty_{per}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に分けて考えた．任意の弱解がこうした性質を持つかどうかは未解決問題であるが，このような弱解の存在は Kyed(2012) により示されている．ここで定常部分 v_s は $\frac{1}{T} \int_0^T v \, dt$ ，純周期部分 v_p は $v_p = v - v_s$ と定義する．

私は弱解 v が与えられた時に定常部分 v_s と純周期部分 v_p がそれぞれ満たしている方程式を特定し，方程式の解である v_s と v_p を基本解を用いて表現した．定常部分 v_s については，定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の表現に関する先行研究を参考にして

$$v_s(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T} \int_0^T \nabla E_s(x - y)(F - v \otimes v)(s, y) \, ds dy$$

と表現できることを示した．ただし， $n = 3, 4$ の場合には F の定常部分 F_s が $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属するという仮定のもとで v_s の表現を得ることができたものの， $n \geq 5$ の場合には $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ (コンパクトな台を持つ滑らかな関数の集合) に属するという仮定のもとでしか示せていない．

一方で、純周期部分 v_p については F の純周期部分 F_p が $L^2_{per}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ に属するという仮定のもとで

$$v_p(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T} \int_0^T \nabla E_p(t - s, x - y) (F - v \otimes v)(s, y) ds dy$$

という表現を示すことに成功した．上記2つの表現を併せることで弱解 v に対して目標としていた表現

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T} \int_0^T \nabla E(t - s, x - y) (F - v \otimes v)(s, y) ds dy$$

を得た．上で述べたように $n \geq 5$ の場合には定常部分 v_s の表現が強めの仮定のもとでしか得られていないため、 v の表現も同様の仮定 $F \in C^\infty_{0,per}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ のもとでしか得られない．本研究においてはこのような仮定で v の表現が得られれば十分であるが、本研究とは別の問題として、定常部分についての議論を改良することで $F \in L^2_{per}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ という望ましい仮定で弱解の表現を得られるようにしたい．

弱解の表現公式が得られたので、 $F \in C^\infty_{0,per}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ と仮定しながら基本解の性質を用いて計算することで弱解について新たな情報を導くことが出来た．定常部分 v_s について新たな情報を得る $\rightarrow$ それを使って純周期部分 v_p について新たな情報を得る $\rightarrow$ それを使って v_s について新たな情報を得る、というような操作を適当な回数繰り返すことで、 $n \geq 5$ の場合に例えば

$$v_s \in L^{n/(n-1),\infty}(\mathbb{R}^n), \quad v_p \in L^\infty_{per}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^n))$$

を得た．ここで $L^{n/(n-1),\infty}(\mathbb{R}^n)$ は弱 $L^{n/(n-1)}$ 空間を表す．次節で見るように v_s のクラスは一般に期待できる最良減衰を捉えているクラスである ($|x|^{1-n} \in L^{n/(n-1),\infty}(\mathbb{R}^n)$ であるので)．一方、 $n = 3, 4$ の場合は基本解の性質を使って計算しても (評価が閉じている為に) v_s についての新たな情報が得られなかった． v_s について若干の速い減衰を追加で仮定すれば上のような良い減衰を導くことができるが、 $n = 3, 4$ の場合についてはもう少し解析を続けたい．

2 速い各点減衰度を持つ時間周期解の構成とその漸近展開

解がどれほどの速さで減衰するのかという情報は解の一意性や安定性などの性質を調べる上で重要である．Navier-Stokes 方程式の時間周期問題の場合、3次元外部領域においては $|x|^{-1}$ が一般に期待できる最良減衰度であることが知られている (時間周期解は時間変数について減衰しない) が、他の領域については良く分かっていない．しかしながら全空間 $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ においては、自明な時間周期解である定常解で $|x|^{1-n}$ という外部領域の場合よりも速く減衰する解の存在が知られており、時間周期問題についてもこのような速い減衰度を持つ解の存在が期待できる．私は時間周期問題に対する Stokes 基本解を用いてこのような解を実際に構成することに成功した．

解析の方法としては Navier-Stokes 方程式をその線形化方程式である Stokes 方程式からの摂動と見なし、Stokes 基本解 E を用いて Navier-Stokes 方程式を

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T} \int_0^T \nabla E(t-s, x-y) (F - v \otimes v)(s, y) ds dy$$

という積分方程式に変換した．Stokes 基本解 E の定義から右辺を定常部分と純周期部分に分けることができ、これらをそれぞれ計算して各部分の減衰度を明らかにした．この研究の主結果として、 $X_\mu := \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n); \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x| + 1)^\mu |u(x)| < \infty\}$ と定義したとき、 F が $L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n+\delta})$ ($0 < \delta < 1$) で十分小さければ

$$v \in L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n-1}), \quad \nabla v \in L_{per}^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \quad \text{for all } 1 < q < \infty.$$

なる積分方程式の解が存在することを示した．また、 m を自然数として全ての $j = 1, \dots, m$ について $\nabla^j F \in L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n+j})$ ならば、上の解もこれに対応して

$$\nabla^j v \in L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n-1+j}) \quad \text{for all } j = 1, \dots, m$$

という性質を持つ． $\partial_t F \in L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n+1})$ ならば

$$\partial_t v \in L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n+1})$$

ともなる．また、

$$\nabla^k q \in L_{per}^\infty(\mathbb{R}; X_{n+k}) \quad \text{for all } k = 0, \dots, m-1$$

という性質をもつ圧力 q も構成できた．更に、上のような性質を持つ解の漸近展開を考えたところ、その主要項が

$$\nabla E_s(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T} \int_0^T (F - v \otimes v)(s, y) ds dy$$

で与えられることを示せた．特に、この漸近展開は解 v や F が小さいことを仮定せずとも得ることが出来た． $\nabla E_s(x)$ の係数である積分の値が一般にはゼロにならないことから、私がこの研究において構成した解の持つ各点減衰度は一般に期待できる最良のものであると結論付けることが出来る．

3 L^p 空間での可解性

この研究では上の第1節とは異なった $p \neq 2$ なる L^p 空間の枠組みでの Navier-Stokes 方程式の時間周期問題を考えた．従来の研究手法では時間周期問題を初期値問題の特別な場合として捉えた解析がなされてきたが、私は Stokes 基本解などの理論の基礎となっている Kyed(2012) による理論を用いて初期値問題を經由することなく解析を行い、時間周期

解を構成することに成功した．(この点は上で述べた2つの研究も同様である．) こうした研究手法による先行研究として空間無限遠で $v \rightarrow v_\infty (\neq 0)$ となる場合に Kyed(2014) などによる解の存在定理があるが、 $v \rightarrow 0$ の場合の解の存在は私の研究成果が初めてのものであると思われる．

解析方法としては、求めている解が存在したとするならばその定常部分と純周期部分それぞれが満たすであろう方程式を考え、これらの解 v_s と v_p を実際に構成することにより Navier-Stokes 方程式の時間周期解 $v = v_s + v_p$ を構成した．これら2つの方程式の解析の基礎となる Stokes 方程式の L^p 可解性と一意性を示すのは容易であったが、この一意可解性だけでは Navier-Stokes 方程式の解を構成するために必要な閉じた解の評価を得ることは出来なかった．これを克服するために純周期的 (すなわち時間平均がゼロ) な外力を持った Stokes 方程式の解の性質に着目した．外力が純周期的であることを用いて解に良い性質、特に時間変数のクラスに柔軟性を持たせることができ、このことを利用して Navier-Stokes 方程式の解を構成するために必要な評価を得ることができた．

こうした解析によって以下の成果を得た． $F_s \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $F_p \in L_{per}^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ とし、これらが十分小さければ Navier-Stokes 方程式の解 $\{v, q\} = \{v_s + v_p, q_s + q_p\}$ が存在して

$$v_s \in \dot{H}_{\frac{n}{2}}^1(\mathbb{R}^n), \quad q_s \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$$

かつ

$$v_p \in L_{per}^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}; W^{1, \frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{per}^n(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cap L_{per}^{n+2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad q_p \in L_{per}^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

を満たす．ここで $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ は通常の Sobolev 空間を表し、 $\dot{H}_{\frac{n}{2}}^1(\mathbb{R}^n)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の $L^{\frac{n}{2}}$ -norm に関する完備化で定義する． v_p は純周期的な外力を持つ方程式の解となっており、そのお陰で良い性質を持っている．また、先行研究に比べて外力への弱い正則性の仮定のもとで v の微分についても情報を得ることが出来ている．存在定理以外にも上のようなクラスの解が2つ与えられた時にそれらが共に小さい場合の一致や、 F に追加的な正則性を仮定した場合に解もそれに対応した正則性を持つことも証明した．

4 外部問題について

上で述べた研究成果は全て全空間 $\mathbb{R}^n$ におけるものであるが、全空間での研究の自然な延長として外部領域における解析がある．私の研究課題はこの外部領域における解析も含んでいるが、これについては満足な結果を得られなかった．例えば私は外部領域において上のように初期値問題を經由することなく $|x|^{2-n}$ なる各点減衰度を持つ Navier-Stokes 方程式の時間周期解を構成しようとした ($n = 3$ の場合はこれが一般に期待できる最良減衰度)．外部領域における Stokes 方程式の解の空間無限遠での挙動を考察する際には解に cut-off 関数を掛けて全空間での関数と見なし、それが満たす方程式と全空間での解の性質から外部流の性質を導くのが典型的な手法であるが、ここでは解に cut-off 関数を掛け

たものの発散がゼロではないことが解析を困難にしており，特に時間変数のクラスの柔軟性に欠けてしまって非線形方程式への応用に十分な理論が得られなかった．こうした困難を克服し，全空間において得たような結果を外部領域の場合にも得ることも今後の研究課題として取り組んでいく．