(海外特別研究員事業)

令和 1年 11月 30日

## 海外特別研究員最終報告書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

採用年度 平成30年度 受付番号 201860424 氏 名 日 匠 E た (氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。 なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地(派遣先国名)<u>用務地:理論物理学ペリメータ研究所 (国名:カナダ )</u>

2. 研究課題名(和文)超弦理論・ゲージ理論の双対性とブレーンの性質の研究

3. 派遣期間: 平成 30 年 6月1日 ~ 令和 1 年 11月30日

- 受入機関名及び部局名
  理論物理学ペリメーター研究所
- 5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意 書式任意(A4 判相当3ページ以上、英語で記入も可)
  (研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等)
  (注)「6. 研究発表」以降については様式 10-別紙 1~4 に記入の上、併せて提出すること。

## 1 D3 ブレーンボックス配位と 2 次元 $\mathcal{N} = (0,4)$ 超対称ゲージ理論

2次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  カイラル超対称性は 3次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超対称場の理論における half-BPS 境界条件で保存され得る超対称性であり、3次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称場の理論を実現する IIB 型超弦理論の Hanany-Witten 構成 [1] にさらに NS5' ブレーンと D5' ブレーンを加えた配位によって実現される [2]。私は Amihay Hanany 氏とともにこの状況をさらに一般化して D3 ブレーンが NS5 ブレーンと NS5' ブレーンの間に取り囲まれる 「D3 ブレーンボックス配位」を考え、その D3 ブレーンの低エネルギー有効理論として現れる新しい型の 2次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超対称 quiver ゲージ理論の研究に取り組んだ。我々は周期的な「D3 ブレーンボックス配位」が orbifold 特異点をプローブする D1-D5-D5' ブレーン系に T 双対であることに着目し、Douglas-Moore の手法 [3] を用いて 2 次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超対称 quiver ゲージ理論の field content と相互作用を決定し、理論を特定する quiver ダイアグラムを与えた (図 1 参照)。



(i)





(iii)

図 1 (i)  $\mathcal{N} = (0,4)$  quiver ダイアグラム。橙色の結節点は  $\mathcal{N} = (0,4)$  ゲージ多重項、赤線はフェル ミ多重項、青線は  $\mathcal{N} = (0,4)$  ハイパー多重項、緑線は twisted ハイパー多重項を表す。(ii)  $\mathcal{N} = (0,2)$ quiver ダイアグラム。黄色の結節点は  $\mathcal{N} = (0,2)$  ゲージ多重項、赤線はフェルミ多重項、青矢印と緑矢印 は  $\mathcal{N} = (0,2)$  カイラル多重項を表す。(iii) (i) と (ii) の quiver ダイアグラムに対応するブレーンボックス 配位。4 個の D3 ブレーンボックスは各々縦方向の NS5 ブレーンと横方向の NS5' ブレーンによって囲ま れている。

さらに 2 次元境界のアノマリーを解析することによって我々は NS5 ブレーンと NS5' ブレーンのジャンク

ションにおいてゲージアノマリーの可換部分を相殺する cross-determinant 表現の  $\mathcal{N} = (0,2)$  フェルミ多重 項が存在すべきであることを明らかにした (図 2)。



図 2 NS5 ブレーンと NS5' ブレーンのジャンクションにおいて現れる cross-determinant フェルミ多重 項。図で示されている左上と右下の正号は対応するゲージ対称性の determinant 表現 (ゲージ荷電 +1) を 示し、右上と左下の負号は対応するゲージ対称性の inverse determinant 表現 (ゲージ荷電 -1) を示す。

本研究成果は論文 [4] にまとめられている。

# 2 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論のコーナー配位の双対性と超対称 指数

超共形指数は超対称場の量子論とその双対性の研究において重要な役割を担うことが知られている。超共形 指数は2つの超荷電が存在し、その2乗が dilatation 演算子と理論の他の対称性の生成子の線型結合となる 場合に構成可能である。超共形指数は超共形場の理論の bulk と様々な超共形欠陥 (superconformal defect) 上に住んでいる局所演算子を数え上げるのに用いることができる。私は Davide Gaiotto 氏とともに 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称 U(N) ゲージ理論において 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超共形代数を保存する「half-BPS 3 次元欠陥 (余次元 1 の欠陥)」である境界あるいはインターフェースと 2 次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超共形代数を保存する「quarter-BPS 2 次元欠陥 (余次元 2 の欠陥)」であるコーナーあるいはジャンクションが存在する配位を研究した。 $\mathcal{N} = (0,4)$ 超対称性部分代数は幾何学的 Langlands プログラムにおける最近の研究で重要な役割を担うと考えられてい る。我々は上述の配位が IIB 型超弦理論によって構成されることに着目して IIB 型超弦理論の S 双対性が導 く上述の様々なゲージ理論配位の双対性を予言し、新しい型の超共形指数の計算によって双対性の強力な証拠 を得ることに成功した。この超共形指数は「quarter 指数」と呼ばれ、4 次元の bulk 理論が存在しない場合に は3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称理論の境界の局所演算子を数え上げる「half 指数」となり、さらに 3 次元の境界理論 も存在しない場合には 2 次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超対称理論で定義される楕円種数 (elliptic genus) となる。

超共形指数は特定の極 (pole) を持っており、これは物理的に U(1) フレーバー対称性の下で荷電を持つ局所 演算子の真空期待値に対応し得る。そして対応する留数は切り離される (decoupled) 自由場を取り除くことに よってその真空期待値によって生じるくりこみ群流れで実現される赤外領域の指数を与える。この赤外領域 の指数を得る操作は「Higgsing 操作」と呼ばれ、我々は Fayet-Iliopoulos 的パラメータが導入された場合に スカラー場が得る非自明な真空期待値に対応すると期待される Higgsing 操作を様々な指数に対して研究し、 Higgsing 操作が交差する D ブレーンの「分離」として物理的に解釈できることを見出した (図 3 参照)。



図3 Higgsing 操作による5ブレーンのD3ブレーンからの分離。

また研究成果 [4] でアノマリー相殺整合性条件によって指摘された cross-determinant フェルミ多重項の存 在を quarter 指数の計算によって正当化することに成功した。

quarter 指数は局所演算子の 2 次元ジャンクション上のスピンと R 荷電の情報を取り込んだ変数  $q \ge t$  の函数であり、変数 t を特殊値に取ることによって 2 次元ジャンクション上に現れる Vertex Operator Algebra (VOA) の指標 (character) となる。特に NS5 ブレーンと D5 ブレーンと (1,1) 5 ブレーンに対応する 3 つの 3 次元インターフェースで区切られた 3 つの 4 次元  $\mathcal{N} = 4 U(L), U(M), U(N)$  ゲージ理論が共有する 「Y-ジャンクション」(図 4 参照) において現れるコーナー VOA である  $Y_{L,M,N}$  代数 [5] の真空指標 (vacuum character) は我々の quarter 指数の特殊化として得られる。



図4 Y-ジャンクション。コーナー VOA は  $Y_{L,M,N}$  となる。。

この場合に IIB 型超弦理論の S 双対性は 3 つの異なるゲージ理論配位に対応する非自明な triality 対称性を 導く。本研究は論文 [6] にまとめられている。

# 3 3次元 N = 4 超対称ゲージ理論のミラー対称性と 4次元 N = 4 超対称 ゲージ理論の S 双対性の検証

3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論は Higgs 枝と Coulomb 枝と呼ばれる 2 つの hyperkähler 多様体から構成 される超対称真空のモジュライ空間を持っている。3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論にはミラー対称性と呼ば れる双対性が存在することが知られており、この双対性は全く異なる紫外領域記述を持つある 2 つの理論の組 に対して Higgs 枝と Coulomb 枝を交換し、同時に FI パラメータと mass パラメータを交換すると赤外領域 で等価になるという双対性である。Higgs 枝ではゲージ対称性が完全に破れて量子補正によって影響を受けな い。一方で Coulomb 枝ではゲージ対称性がその極大トーラスに破れて摂動的量子補正に加えてモノポール演 算子による非摂動的量子補正を受ける。従って Coulomb 枝の理解は Higgs 枝よりも一般に難しいが、最近の 物理学の研究 [7] と数学の研究 [8, 9] でその記述が与えられた。3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論は IIB 型超弦 理論のブレーン構成において実現可能であり、ミラー対称性は IIB 型超弦理論の S 双対性として理解される。 このブレーン構成において実現可能であり、ミラー対称性は IIB 型超弦理論の half-BPS 境界条件の双対性 に拡張される [10, 11]。私は 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論の超共形指数と [6] で導入された 4 次元  $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の half 指数を計算することによって 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論の half-BPS 境界条件 の双対性と 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論のミラー対称性を検証した (例として図 5 参照)。



図 5 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論の half-BPS 境界条件と 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論の双対 性の例。(a) Neumann 境界条件を満たす 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称 U(N) ゲージ理論と couple する 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称 quiver ゲージ理論と Dirichlet 境界条件を満たす 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称 U(N) ゲージ理論 の双対性。(b) 対応する IIB 型超弦理論の S 双対なブレーン配位。

その結果として双対な組に対する超対称指数は見事に一致することが分かった。本研究は論文 [12] にまと められている。

# 4 3次元 N = 4 超対称ゲージ理論の N = (0,4) half-BPS 境界条件の双 対性

本研究では IIB 型超弦理論から構成可能な 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論の  $\mathcal{N} = (0,4)$  half-BPS 境界条 件を調べて [6] と [12] で研究されている 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論と 3 次元  $\mathcal{N} - 4$  超対称ゲージ理論の 2 次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超対称ゲージ理論の双対性ネットワークを拡張した。2 次元超対称ゲージ理論の超対称指数 に寄与する極は Jeffrey-Kirwan 留数処方従って特定のゲージ荷電を持つ 2 次元ボソン場に対応するものとな ることが知られている。従って [6] と [12] の場合と異なって  $\mathcal{N} = (0,4)$  half-BPS 超対称を持つゲージ理論配 位は超対称指数の計算において注意深い処方箋が必要となる。特に 2 次元ボソン場が couple する「enriched Neumann 境界条件」では 2 次元境界上のボソン場の配位によって境界モノポールが存在すると考えられるた め、half 指数はモノポール荷電に関する適切な和を含む必要がある。

そこでまず 2 次元ボソン場を 3 次元ゲージ理論の Dirichlet 境界条件の half 指数に加え、その後 Jeffrey-Kirwan 留数処方に従って 2 次元 global 対称性をゲージ化することによって「enriched Neumann 境界条件」 の half 指数の適切な処方箋を考案した。実際にこの処方箋は Neumann 境界条件を満たす 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対 称量子電磁力学が境界上で 1 個の 2 次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  twisted ハイパー多重項と 3 個の荷電フェルミ多重項と 1 個の中性フェルミ多重項と couple する状況でブレーン構成から予想される双対なゲージ理論配位の超対称 指数と見事に一致することが確かめられた (図 6)。



図 6 2次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  twisted ハイパー多重項と荷電フェルミ多重項と中性フェルミ多重項を含む 3次 元  $\mathcal{N} = 4$  超対称量子電磁力学の「enriched Neumann 境界条件」のブレーン構成 (左図) とその双対なブレーン配位 (右図)。双対な配位は 3 次元  $\mathcal{N} = 4$  twisted ハイパー多重項に対する Neumann 境界条件と 3 個のフェルミ多重項となる。

また [4] の D3 ブレーンボックス配位から予想される 2 次元  $\mathcal{N} = (0,4)$  超対称 U(1) ゲージ理論とフェルミ 多重項の間の簡単なミラー対称性を楕円種数の計算によって検証することに成功した。加えて 4 次元  $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論のコーナー配位をさらに couple させて予想される拡張された双対性の検証にも成功した。 本研究は論文 [13] にまとめられている。

### 5 3次元球面上の3次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の分配関数と相関関数

3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論に対する 3 次元球面  $S^3$  上の分配関数は様々な超対称演算子を含ませることによってより豊富な構造を持ち得る。特に最近の超対称局所化の研究 [14, 15, 16] で Higgs 枝局所演算子と Coulomb 枝局所演算子と呼ばれる 2 種類の局所演算子のいずれかの集まりを 3 次元球面内の円  $S^1$  に沿った 任意の点に含めることができることが明らかにされた (図 7)。



図7 3次元球面  $S^3$ 内の円  $S^1$ 上に沿った Higgs 枝局所演算子あるいは Coulomb 枝局所演算子の集まり  $\{O_i\}$ 。

3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論は Higgs 枝と Coulomb 枝に対応する 2 つのカイラルリングを持つ。Higgs 枝カイラルリングはハイパー多重項スカラー場のゲージ不変な多項式によって生成され、Coulomb 枝カイラ ルリングは dressed モノポール演算子によって生成される。3 次元  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論を  $\Omega$  変形された 2 次元平面  $\mathbb{R}^2_{\epsilon}$  と時間  $\mathbb{R}_t$  から構成される 3 次元時空に置くと、これらの可換カイラルリングは量子化されて 非可換な量子 Higgs 枝代数と量子 Coulomb 枝代数が得られる。量子 Higgs 枝代数と量子 Coulomb 枝代数は 理論の FI パラメータと mass パラメータにそれぞれ依存する。私は Davide Gaiotto 氏とともに 3 次元球面  $S^3$  上の分配関数及び  $S^1$  上に置かれた Higgs 枝局所演算子あるいは Coulomb 枝演算子の相関関数が一般に量 子 Higgs 枝代数と量子 Coulomb 枝代数で定義される Verma 加群の twisted 指標 (twisted トレース)を用い て代数的に構成できることを見出した。量子 Higgs 枝代数と量子 Coulomb 枝周 かいまted トレースは mass パラメータと FI パラメータにそれぞれ依存し、 $S^3$  上の分配関数及び Higgs/Coulomb 枝局 所演算子の相関関数はこれら 2 つの twisted トレースの積の (トポロジカルに自明な) 理論の massive 真空に 関する和として表され、mass パラメータと FI パラメータ FI パラメータ両方に依存する。

特に平坦時空内の N 枚の M2 ブレーンを記述する ADHM ゲージ理論 (1 個の随伴表現のハイパー多重項 と基本表現のハイパー多重項を持つ U(N) ゲージ理論) における massive 真空は Young 図によってラベル 付けされ、分配関数は Young 図に関する和として表現される。ADHM ゲージ理論の量子 Higgs 枝代数と Coulomb 枝代数は有理 Cherednik 代数の spherical 部分であり [17]、我々は Verma 加群の twisted 指標が逆 平面分割 (図 8 参照) の数え上げの母関数と関連づくことを見出した。本研究は論文 [18] にまとめられている。



図 8 (a) Young 図 (4,3,2) (b) 逆平面分割 (c) 結晶模型。

### 参考文献

- A. Hanany and E. Witten, "Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics," Nucl. Phys. B492 (1997) 152-190, arXiv:hep-th/9611230 [hep-th].
- H.-J. Chung and T. Okazaki, "(2,2) and (0,4) Supersymmetric Boundary Conditions in 3d N = 4 Theories and Type IIB Branes," *Phys. Rev.* D96 no. 8, (2017) 086005, arXiv:1608.05363
   [hep-th].
- [3] M. R. Douglas and G. W. Moore, "D-branes, quivers, and ALE instantons," arXiv:hep-th/9603167 [hep-th].
- [4] A. Hanany and T. Okazaki, "(0,4) brane box models," JHEP 03 (2019) 027, arXiv:1811.09117
  [hep-th].
- [5] D. Gaiotto and M. Rapcak, "Vertex Algebras at the Corner," JHEP 01 (2019) 160, arXiv:1703.00982 [hep-th].
- [6] D. Gaiotto and T. Okazaki, "Dualities of Corner Configurations and Supersymmetric Indices," JHEP 11 (2019) 056, arXiv:1902.05175 [hep-th].
- [7] M. Bullimore, T. Dimofte, and D. Gaiotto, "The Coulomb Branch of 3d  $\mathcal{N} = 4$  Theories," Commun. Math. Phys. **354** no. 2, (2017) 671–751, arXiv:1503.04817 [hep-th].
- [8] H. Nakajima, "Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional  $\mathcal{N} = 4$  gauge theories, I," Adv. Theor. Math. Phys. **20** (2016) 595-669, arXiv:1503.03676 [math-ph].
- [9] A. Braverman, M. Finkelberg, and H. Nakajima, "Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional N = 4 gauge theories, II," Adv. Theor. Math. Phys. 22 (2018) 1071-1147, arXiv:1601.03586 [math.RT].
- [10] D. Gaiotto and E. Witten, "Supersymmetric Boundary Conditions in N=4 Super Yang-Mills Theory," J. Statist. Phys. 135 (2009) 789-855, arXiv:0804.2902 [hep-th].
- [11] D. Gaiotto and E. Witten, "S-Duality of Boundary Conditions In N=4 Super Yang-Mills Theory," Adv. Theor. Math. Phys. 13 no. 3, (2009) 721-896, arXiv:0807.3720 [hep-th].
- [12] T. Okazaki, "Mirror symmetry of 3D  $\mathcal{N} = 4$  gauge theories and supersymmetric indices," *Phys. Rev.* **D100** no. 6, (2019) 066031, arXiv:1905.04608 [hep-th].

- [13] T. Okazaki, "Abelian dualities of  $\mathcal{N} = (0, 4)$  boundary conditions," *JHEP* **08** (2019) 170, arXiv:1905.07425 [hep-th].
- [14] M. Dedushenko, S. S. Pufu, and R. Yacoby, "A one-dimensional theory for Higgs branch operators," JHEP 03 (2018) 138, arXiv:1610.00740 [hep-th].
- [15] M. Dedushenko, Y. Fan, S. S. Pufu, and R. Yacoby, "Coulomb Branch Operators and Mirror Symmetry in Three Dimensions," JHEP 04 (2018) 037, arXiv:1712.09384 [hep-th].
- [16] M. Dedushenko, Y. Fan, S. S. Pufu, and R. Yacoby, "Coulomb Branch Quantization and Abelianized Monopole Bubbling," JHEP 10 (2019) 179, arXiv:1812.08788 [hep-th].
- [17] R. Kodera and H. Nakajima, "Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras," *Proc. Symp. Pure Math.* 98 (2018) 49–78, arXiv:1608.00875 [math.RT].
- [18] D. Gaiotto and T. Okazaki, "Sphere correlation functions and Verma modules," arXiv:1911.11126 [hep-th].