ウェブサイト公開用

(様式 10)
(海外特別研究員事業)
平成 31 年 3 月 31 日

海外特別研究員最終報告書

独立行政法人 日本学術振興会 理事長　殿

採用年度　2018
受付番号　201860263
氏　　名　坂田繁洋

(氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。
なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地（派遣先国名）用務地：ワルシャワ　　（国名：ポーランド共和国）

2. 研究課題名（和文）※研究課題名は申請時のものと違わないように記載すること。
凸体の中心と双対体積の幾何不等式

3. 派遣期間：平成 30 年 9 月 1 日　～　平成 31 年 3 月 2 日

4. 受入機関名及び部局名
Warsaw University of Technology, Department of Mathematics and Information Science

5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意　**書式任意（A4 判相当 3 ページ以上、英語で記入も可）**
（研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等）
（注）「6. 研究発表」以降については様式 10－別紙 1～4 に記入の上、併せて提出すること。

海外特別研究員最終報告書
所期の目的の遂行状況及び成果

採用年度　2018 年度
受付番号　201860263
宮崎大学教育学部　講師　坂田繁洋

所期の研究目的の背景

当該特別研究員の主たる研究分野である凸体の幾何学では, (主に Euclid 空間内の) 凸体 (compact 凸集合で内部が空でないもの) の体積・表面積・幅の平均・直径などの幾何学的量に興味がある。基本的な研究姿勢の 1 つとして, 凸体の幾何学的量の間の不等式を得ることが挙げられる。得られた不等式の等号成立条件は, しばしば, 凸体の形状の特徴づけとなる。

当該特別研究員は, 凸体の切り口の幾何学に興味がある。凸体の切り口の幾何学では, 「Euclid 空間内の凸体 K を平面で切り, その切り口の情報から K の幾何学的情報を引き出そう」という問題意識が基本的なものとして挙げられる。n 次元 Euclid 空間内の原点を含む凸体 K に対して, 原点を通る i 次元平面による K の切り口の i 次元体積の平均は, i 次の**双対体積**とよばれる。双対体積は, [L] で導入され, その等周問題型不等式が示されたり, 既知の幾何不等式の拡張が成されたりした。以来, 凸体の切り口の幾何学において, 最も重要な量の 1 つとなっている。

注意すべきは, $n-1$ 次以下の双対体積の値は原点のとり方に応じて変わることである。通常の体積 (n 次の双対体積) は原点のとり方に依らないので, この事情を何らかの形で解消したいという問題は自然なものである。すなわち,

> 凸体 K が与えられるごとに, その双対体積を扱う際には, ここに原点を取れば多くの研究が成功する

というような原点の「良い位置」が求められる。

[M] では, 凸体 K に対して, その i 次の双対体積を最大にする原点の位置を K の i 次の**輻射中心**とよび, 原点の「良い位置」の候補として提案された。[HMP, O] では, 輻射中心は Riesz ポテンシャルの最大点として得られることが指摘され, その物理的意味づけが与えられた。また, [O] では, 凸でない体 (有界な開集合の閉包) と整数でない i にも輻射中心の概念を拡張され, 内心・重心・Chebyshev 心は i を助変数とする輻射中心の族に含まれることが示された。

輻射中心の存在は容易に示される。次に考察すべきは個数である。物理的意味づけを基に「体の形状や i の値によっては, 輻射中心が複数個存在する」と予想されたため, 輻射中心の一意性の十分条件が問題となった。[M, O] で, 輻射中心の一意性の十分条件は与えられたが, 研究の余地は残った。例えば, 「任意の凸体は, 各 i に対して, 唯一つの輻射中心をもつ」と予想されたが, $1<i<n+1$ の場合は未解決であった。また, 輻射中心が複数個存在する例を証明付きで示した文献はなかったため, その点も問題であった。

輻射中心の位置も基本的な問題の 1 つである。「体に対称性を仮定すると, 輻射中心の存在範囲は小さく限定されるか」, 「輻射中心は体の境界からどれだけ離れているか」などの問題が挙げられた。

逆問題の視点から, 輻射中心による体の形状の決定も重要な問題として挙げられた。内心・重心・Chebyshev 心は i を助変数とする輻射中心の族に含まれるから, 輻射中心は i に関して一般に動く。そこで, i に関して動かない輻射中心をもつ体の形状は興味の対象となる。これは「内心・重心・Chebyshev 心の少なくとも 2 つが一致する三角形は正三角形に限る」という初等幾何の定理の拡張とも言える。

当該特別研究員は, 申請時に, 上記の問題に対して, いくつかの研究成果を得ていた。特に, [O] による輻射中心の物理的意味づけを基に, 輻射中心の解析学 (ポテンシャル論, 偏微分方程式論) 的性質を研究してい

た。言い換えれば, 輻射中心が導入された経緯を忘れて, 輻射中心そのものがもつ興味深い性質を研究していた。

所期の研究の目的

当該特別研究員の当該事業における所期の目的は, 輻射中心が導入された経緯を思い出し, 輻射中心の「良さ」を示すこと, また, それにより, 凸体の切り口の幾何学 (特に, 双対体積の研究) に本質的な進展を与えることである。当該特別研究員は, 3 つの具体的なテーマを設定し, そのテーマに進展を与えることを目的とした。以下, それについて述べる。

課題 1：動かない輻射中心をもつ凸多角形の決定

輻射中心が i に関して動かない凸多角形の形状を決定できるかどうかについて考察する。次の結果は, 申請時に大筋完成しており, 査読付き学術論文として出版する準備を進めていた：

- 輻射中心が任意の i に関して動かないための必要十分条件を与えること
- 輻射中心が任意の i に関して動かないような凸多面体を特徴付けること
- 輻射中心が任意の i に関して動かないような三角形と凸四角形を決定すること

当該申請者は, これらの研究成果をさらに発展させるために, 次の問題の解決を掲げた：

> **問題 1**　凸多角形 P の i 次の輻射中心と j 次の輻射中心が一致するならば, P は回転対称性をもつか? すなわち, 非自明な回転 g で, $gP = P$ となるものは存在するか?

話を三角形の場合に限れば, 「輻射中心が任意の i に関して動かない」という条件は, 「重心・内心・Chebyshev 心を含む三角形の中心を非可算無限個用意し, それらのすべてが一致する」と言い換えられる。一方で, 初等幾何でよく知られる正三角形の特徴づけで必要な三角形の中心は, 重心・内心・Chebyshev 心の中から 2 個だけである。すなわち, 当該特別研究員が申請時に大筋得ていた成果は, 改良が求められるものであったため, 問題 1 は考察されるべきものであり, その解決は輻射中心の「良さ」を提示する内容と言える。

課題 2：双対体積の幾何不等式

凸体の双対体積とよく知られる幾何学的量 (体積・表面積・幅の平均・直径など) の間の不等式を導くことを試みる。具体的には, 次の問題の解決を試みる：

> **問題 2**　単調増加関数 f で, 任意の凸体 K に対して, K の双対体積での f の値が K のよく知られる幾何学的量の下界になるものを見つけよ。また, 等号成立条件も求めよ。

輻射中心は K の双対体積を最大にする原点の位置であった。そのため, 問題 2 の解決は,

$$f\left(\begin{array}{c}K \text{ の双対体積}\\ (\text{原点} \neq \text{輻射中心})\end{array}\right) \leq f\left(\begin{array}{c}K \text{ の双対体積}\\ (\text{原点} = \text{輻射中心})\end{array}\right) \leq K \text{ のよく知られる幾何学的量}$$

と表せる。すなわち, 「原点を輻射中心に選ぶと, K の幾何的量を最も良く評価する双対体積を得られる」という意味で, その「良さ」が提示される。

問題 2 は, 当該特別研究員が派遣期間中に最も注力すべき問題である。問題 2 の解決のためには, Brunn–Minkowski 理論, 凸幾何学における積分変換 (Fourier 変換, Radon 変換) および球面調和解析を十分に理解

する必要がある。すなわち, 問題 2 に取り組むことは, 問題そのものを解決するだけでなく, 派遣終了後も継続して凸体の切り口の幾何学に本質的な貢献をするための礎を築くという要素も含まれている。

課題 3：新しい原点の「良い位置」の提案

凸体 K とその内点 x から作られる K の x における**極体**とよばれる凸体 K^x を題材に, 新しい原点の「良い位置」を提案する。x に対して, K^x の体積を返す関数は唯一つの最小点をもつ。その点は **Santaló 点**とよばれる。その概念を拡張して, K^x の i 次の双対体積を返す関数の唯一つの最小点の性質を考察する。具体的には, 申請時までに考察されていた輻射中心の問題と課題 1 および 2 を Santaló 点の場合に修正し, その解決を図る。また, 輻射中心と Santaló 点の相違点を整理し, どの意味でどちらの方が「良い」のかを明確にする。

課題 3 に取り組む際, 凸体の影の幾何学と距離空間の幾何学に関する知識とセンスが必要になると予想している。それらの事項に関して, 当該特別研究員は十分に精通していないが, 派遣先の指導者および関連する研究者は精通している。そのような事情から, 課題 3 の大きな目的は, 関連する研究者と共同で問題解決をし, 必要となる知識とセンスを修得し, 当該特別研究員が, 派遣終了後に, 単独で課題発見から解決までできるようになるための準備も行うことである。

研究課題以外の所期の目的

凸体の幾何学, 特に凸体の切り口の幾何学, の研究者は国内では希少であり, 最新の動向を把握しづらい。そのため, 凸体の幾何学に関連する研究者が集中している欧州に滞在し, 最新の動向を把握すると同時に, 今後も継続して交流する関係づくりは, 当該特別研究員の将来の発展的研究には欠かせない。当該特別研究員は, 当該事業を通して, 派遣先 (ポーランド・ワルシャワ) を中心として, 多くの研究者とコミュニケーションをとり, 今後の交流の関係づくりをすることも目的としている。

所期の目的の成果と遂行状況

各課題について, 得られた成果とその遂行状況を述べる。

課題 1 に関する成果と遂行状況

申請時に大筋完成していた内容は, 派遣開始までに査読付き学術雑誌へ投稿したが, 査読の段階で若干の不備を指摘され, 掲載受理を得ていなかった。派遣期間中に, 関連する研究者から助言をいただき, 細かい箇所を詰め, 査読付き学術雑誌へ投稿し, 掲載受理を得た。

三角形 $\triangle$ に対して, 問題 1 を考察し, 次の結果を得た：

(1-1) 各 i に対して, $\triangle$ の内点が $\triangle$ の輻射中心になるための必要十分条件を与えた。

(1-2) ある i が存在して, i 次の輻射中心と内心が一致するならば, $\triangle$ は正三角形に限る。

(1-3) ある i が存在して, i 次の輻射中心と Chebyshev 心が一致するならば, $\triangle$ は正三角形に限る。

(1-1) は, [AK] の手法を改良することで得られた。[AK] では, $\triangle$ の 1 次の輻射中心の初等幾何的特徴づけが与えられている。当該申請者は, 派遣期間中に, [AK] の内容を理解し, その手法を改良する術を発見し, 任意の i に対して, 三角形の i 次の輻射中心の初等幾何的特徴づけを与えた。

(1-2), (1-3) は, (1-1) を用いて導かれる。内心は $-\infty$ 次の輻射中心, Chebyshev 心は $+\infty$ 次の輻射中心である。その事実から, 上記の成果は, 問題 1 の部分解に相当する。すなわち, 問題 1 が, 三角形に対して, $j = \pm\infty$ の場合に解かれたことになる。

輻射中心は Riesz ポテンシャルの最大点であった。その事実を基に, 当該申請者は, 上記の結果を, 輻射中心に限らず, 一般の距離核ポテンシャルの最大点に対しても考察し, 同様の結果を得た。その結果は, 全空間における熱方程式の解と上半空間における Poisson 積分にも適用できる。

当該特別研究員は, 派遣期間中, これらの成果を Jagiellonian University のセミナーで発表した。また, 現在, 学術論文の形で発表するための準備を進めている。

派遣期間中に, 一般の凸多角形に対しても問題 1 の解決を試みたが, 上記の結果を得る過程で, 本質的に, 三角形のみがもつ性質に頼ったため, 成果は得られていない。また, 三角形に対して, $j = \pm\infty$ でない場合に問題 1 を解決することも試みたが, 上記の成果を得る過程で, 本質的に, 内心と Chebyshev 心の初等幾何的性質に頼ったため, 成果は得られていない。これらの試行錯誤から, 四角形に対して, $j = \pm\infty$ の場合に問題 1 を解決することが直近の課題であると予想している。

課題 2 に関する成果と遂行状況

Irmina Herburt 氏 (派遣先の指導者) との共同研究で, 円板に含まれる凸多角形の $p-2$ 次のモーメントの極値問題を考察し, 次の結果を得た：

(2-1) $0 < p \leq 2$, $n \geq 3$ に対して, 円板に含まれる凸 n 角形の $p-2$ 次のモーメントは, 円に内接する正 n 角形によってのみ最大化される。

(2-2) $p \leq 0$, $n \geq 3$ に対して, 円板に含まれその中心を内部に含む凸 n 角形の $p-2$ 次のモーメントの Hadamard の有限部分は, 円に内接する正 n 角形によってのみ最大化される。

(2-3) $2 < p < 4$, $n \geq 3$ に対して, 円に内接する凸 n 角形の $p-2$ 次のモーメントは, 円に内接する正 n 角形において, 局所最大になる。

(2-4) $n \geq 4$ に対して, 円に内接する凸 n 角形の 2 次のモーメントは, 円に内接する正 n 角形において, 局所最大になる。

(2-5) 円に内接する三角形の 2 次のモーメントは, 円に内接する正三角形において, 局所最大にも局所最小にもならない。

(2-6) $p > 4$ に対して, 円に内接する三角形の $p-2$ 次のモーメントは, 円に内接する正三角形において, 局所最小になる。

n 次元 Euclid 空間内の凸体 K の $p-n$ 次のモーメントは, K が原点を内部に含むならば, p 次の双対体積に比例する。この事実から, 上記の結果は, 円板に含まれる (または円に内接する) 凸多角形の双対体積の不等式と言えるため, 当該申請者は, 課題 2 に進展を与えたと言える。

$p = 2$ のとき, 上記の結果は, 「円板に含まれる凸 n 角形の中で, 最も面積の大きいものは, 円に外接する正 n 角形である」というよく知られる定理になる。言い換えれば, 当該特別研究員は, その古典的結果をモーメントの言葉で一般化した。

円板を含む凸多角形の $p-2$ 次のモーメントの極値問題も考察した。「$p \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$ に対して, 円板を含む凸 n 角形の $p-2$ 次のモーメントは, 円に外接する正 n 角形によってのみ最小化される」という結果を得た。

当該特別研究員と Herburt 氏は, 上記の結果を学術論文の形にまとめ, 査読付き学術雑誌へ投稿した。

上記の結果は平面上の凸多角形に関するものである。その先の研究として, n 次元 ($n \geq 3$)Euclid 空間の凸多面体に対しても同様の問題を考察した。しかし, 現段階では, 成果は得られていない。文献調査をした範囲で, $p = n$ の場合 (球に内接する凸多面体の体積の極値問題) に限っても部分的結果しか知られていないため, 難しい問題であると予想している。

上記の結果を, 球面または双曲平面上の凸多角形に対しても考察した。同様の方針で解決できると予想していたが, 上記の結果を得る過程で, Euclid 平面上の初等幾何に頼っていたため, 困難が生じた。球面上の凸幾何学に精通している Marek Lassak 氏 (University of Science and Technology in Bydgoszcz) に相談し,

解決を試みたが, $p = 2$(円板に内接する凸多角形の面積の極値問題) に限っても, その定式化が複雑になったため, 成果は得られていない。

上記の結果は, 課題 2(双対体積の不等式を得ること) への進展にはなっているが, 問題 2(輻射中心の「良さ」を不等式によって示すこと) への進展にはなっていないことに注意する。当該特別研究員は, 問題 2 の解決を試み, 問題 2 で述べたような単調増加関数 f を具体的に見つけることに成功した。それにより得られる不等式は, i 次の双対体積の Brunn–Minkowski 型不等式とよべるものである。ただし, $0 < i < 1$ という条件が必要である。

i 次の双対体積は, i が整数の場合に最も興味深い対象であるから, 当該特別研究員が派遣期間中に得られた結果には改良が求められる。$i = 1$ の場合には, 解決の糸口が見つかっており, 凸体の間の動径和 (radial sum) と Minkowski 和とよばれる演算の相違点を理解することが鍵となっている。その他の場合には, 解決の方針が立っておらず, 幾何不等式と球面調和解析に詳しい, Michał Zwierzyński 氏 (Warsaw Univeristy of Technology) に相談し, 関連する先行研究の勉強会を行っている。

課題 3 に関する成果と遂行状況

当該特別研究員の所期の派遣期間は 2018 年 9 月 1 日から 2020 年 8 月 31 日までであったが, 派遣期間中に所属変更をすることになり, それに伴い派遣期間を 2018 年 9 月 1 日から 2019 年 3 月 2 日までに変更した。そのため, 課題 3 に取り組むことはできなかった。

研究課題以外の所期の目的に対する成果と遂行状況

当該特別研究員が派遣期間中にコミュニケーションをとった研究者を列挙する：

1. Irmina Herburt(派遣先の指導者)

   所属 Warsaw University of Technology

   主たる研究分野・対象 距離空間の幾何学, 輻射中心

2. Maria Moszyńska

   所属 Warsaw University

   主たる研究分野・対象 凸幾何学, 輻射中心, 凸体の minimal ring

3. Grzegorz Sójka

   所属 Warsaw University of Technology

   主たる研究分野・対象 凸幾何学

4. Agnieszka Bogdewicz

   所属 Warsaw University of Technology

   主たる研究分野・対象 距離空間の幾何学, 凸体の minimal ring

5. Michał Zwierzyński

   所属 Warsaw University of Technology

   主たる研究分野・対象 幾何不等式, 球面調和解析, 等周不等式

6. Tomasz Kobos

   所属 Jagiellonian University

主たる研究分野・対象 Banach 空間の幾何学

7. Marek Lassak

   所属 University of Science and Technology in Bydgoszcz

   主たる研究分野・対象 球面上の凸幾何学, 球面上の凸体の幅

8. Krzysztof Przesławski

   所属 University of Zielona Góra

   主たる研究分野・対象 球面調和解析, 離散 Fourier 解析, 関数の最大点

参考文献

[AK] Hrvoje Abraham and Vjekoslav Kovač, *From electrostatic potentials to yet another triangle center*, Forum Geom. **15** (2015), 73–89.

[HMP] Irmina Herburt, Maria Moszyńska and Zbigniew Peradzyński, *Remarks on radial centres of convex bodies*, Math. Phys. Anal. Geom. **8** (2005), 157–172.

[L] Erwin Lutwak, *Dual mixed volumes*, Pacific J. Math. **58** (1975), No. 2, 531–538.

[M] Maria Moszyńska, *Looking for selectors of star bodies*, Geom. Dedicata **81** (2000), 131–147.

[O] Jun O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. Appl. Math. **48** (2012), 365–392.