

令和 2 年 7 月 30 日

海外特別研究員最終報告書

独立行政法人日本学術振興会 理事長 殿

採用年度 平成 30 年度

受付番号 201860076

氏 名 佐野 昂 迪

(氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。

なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地（派遣先国名）用務地：ロンドン（国名：英国）
2. 研究課題名（和文）※研究課題名は申請時のものと変わらないように記載すること。
L 関数の特殊値の包括的研究
3. 派遣期間：平成 30 年 9 月 1 日 ~ 令和 2 年 7 月 3 日
4. 受入機関名及び部局名
King' s College London, Department of Mathematics
5. 所期の目的の遂行状況及び成果…書式任意 **書式任意 (A4 判相当 3 ページ以上、英語で記入も可)**
(研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等)
(注)「6. 研究発表」以降については様式 10-別紙 1~4 に記入の上、併せて提出すること。

研究目的

私は数論における中心的な研究対象である L 関数の特殊値に興味があり、具体的には

- 高階 Euler 系の理論の構築、
- Mazur-Rubin-Sano (MRS) 予想の一般化

を主な研究目的としていた。派遣期間中にこれらの目的は満足のいく形で達成することができたので、その詳細について報告する。

研究実施状況

2018 年 9 月 1 日に渡航し、その数週間後、David Burns 氏と Kwok-Wing Tsoi 氏との共著論文 [13] を完成させ、arXiv に投稿した。この論文は「一般のモチーフに対する MRS 予想」を扱うものであり、研究目的の一つは早くも達成することができた。

その後、次の目的である高階 Euler 系の理論の構築に取り組んだ。10 月から坂本龍太郎氏が 2 ヶ月ほど訪問し、その数ヶ月後の 2019 年 2 月に、Burns 氏と坂本氏との共著論文 [6] を arXiv に投稿した。これに引き続き、この論文で構築した理論の一つの応用として、MRS 予想を多くの場合に解決した論文 [7] を 3 月に arXiv に投稿した。

また、2 月に栗原将人氏が 1 週間ほど訪問し、「楕円曲線に対する MRS 予想」に関して議論した。このことに関してはその後数ヶ月間研究を継続した結果、当初期待していた以上のことがわかり、研究成果を 2 つの論文 [3], [4] にまとめることとなった。このうち、論文 [3] は 10 月に arXiv に投稿し、論文 [4] は公表はしていないもののほぼ完成している状態である。

これと同時進行で、Burns 氏、Alexandre Daoud 氏、Soogil Seo 氏との共同研究で、高階 Euler 系の理論の別の応用として、Coleman 予想の一般化に関する研究を行なった。このことに関する研究結果は論文 [1] にまとめ、6 月に arXiv に投稿した。この研究は Burns 氏との以前の共著論文 [8] で作り上げた理論が基礎となっているが、この論文は 3 月に受理された。

また、7 月に論文 [2] が受理され、12 月に論文 [13] が受理された。

次に、Burns 氏との共同研究で、高階 Euler 系の理論のさらなる発展として、「関数等式」と「非可換」という 2 つの異なる方向性で研究を進め、研究結果をまとめた論文 [9], [10] をそれぞれ 2020 年 3 月、4 月に arXiv に投稿した。

その後、非可換 Euler 系と同変玉河数予想との関係を扱った論文 [11] と、階数 1 のモチーフに対する高階 Euler 系の間に成立する合同式を扱った論文 [12] の執筆を進め、派遣期間中にほぼ完成させることができた。

研究成果

高階 Euler 系の理論の構築について

まず、高階 Euler 系の理論の構築に関しては、期待していたことをほぼ満足のいく形で達成できた。以前の論文 [5] では「いくつかの仮定が満たされればこれこれの結果が得られる」という一般論のみ与え、どのような場合にその仮定が満たされるかを詳しく考察していなかった。論文 [6] ではその点を徹底的に考察し、Euler 系の具体例である「Kato の Euler 系」と「Rubin-Stark 元の Euler 系」に関する新しい結果を得た。特にこの具体的な考察の過程で、「Bloch-Kato 元」という新しい概念を導入し、同変玉河数予想に関する新しい結果も得ることができた。この Bloch-Kato 元は、楕円曲線の場合には Kato の Euler 系と関係を持つことが自然に予想できるが、我々はその予想が Perrin-Riou 予想の一般化になっていることも示した。Perrin-Riou 予想は近年多くの研究者により活発に研究されている予想だが、我々は同変玉河数予想と Bloch-Kato 元という通常とは異なるアプローチをとることで、それまで誰も成し得なかった一般化を与えた。この研究は次の「楕円曲線に対する MRS 予想」の研究にも繋がっていった。

また、論文 [7] では我々が構築した理論の応用として、MRS 予想を多くの場合に解決した。証明の鍵は「高階 Euler 系から高階 Kolyvagin 系が自然に構成できる」ということと「高階 Kolyvagin 系は本質的にただ 1 つしかない」ということにあるが、我々はこれらの事実を以前の論文 [5] において一般的に証明した。「階数 1 の Euler 系から階数 1 の Kolyvagin 系が自然に構成できる」と「階数 1 の Kolyvagin 系は本質的にただ 1 つ」という事実は Mazur と Rubin により数十年前に示されており、階数が 1 より大きい「高階」の場合には何が起こるかは長年の未解決問題であったが、我々はこれらの問題の完全な解答を与えたことになる。

また、以前の論文 [8] で導入した「基本 Euler 系」の理論の応用として、論文 [1] において Coleman 予想の一般の代数体に対する一般化を予想として定式化し、すでに作り上げた高階 Euler 系の理論を応用することで、この予想の強い証拠を与えた。

高階 Euler 系の理論のさらなる発展として、論文 [9] において、Euler 系の関数等式について考察し、 p 進表現 T とその Kummer 双対 $T^*(1)$ に対する Euler 系の間の正確な関係を与えた。その応用として、Deligne-Ribet の p 進 L 関数と関係する高階 Euler 系の自然な構成と、Coleman-Ihara の公式の総実体上への一般化の定式化を得ることができた。

また、別方向への発展として、論文 [10] において Euler 系の概念の非可換 Galois 拡大に対する一般化である「非可換 Euler 系」を導入し、以前の論文 [8] で構築した理論の非可換に対する一般化を与えた。この応用として、古典的な円単数の Euler 系と関係する非可換 Euler 系の構成をすることができた。

以上のように、高階 Euler 系の理論の構築は満足のいく形で成し遂げることができた。

MRS 予想の一般化について

次に、MRS 予想の一般化に関しては、まず論文 [13] において一般のモチーフに適用できる形の一般化を与えた。この論文では、興味深い具体例に特化した詳しい考察はしなかったが、論文 [6] における Bloch-Kato 元と Perrin-Riou 予想に関して得たアイデアを組み合わせることで、楕円曲線に対する MRS 予想が Perrin-Riou 予想の一般化になっていることを示すことができた。MRS 予想と Perrin-Riou 予想はそれまで全く関係がなかったため、この発見は意外であり驚きでもあった。さらに考察を進めることで、楕円曲線の MRS 予想は Mazur-Tate-Teitelbaum 予想の一般化となっていることも示すことができた。この証明の過程で、独自の興味があるいくつかの面白い結果も得られた。まず、Mazur-Tate-Teitelbaum 予想には「 p 進レギュレーター」という量が現れるが、我々はその一般化となる「Bockstein レギュレーター」という新しい量を定義した。 p 進レギュレーターは「楕円曲線が p で加法的還元を持たない」という仮定の下で定義される量だが、我々の Bockstein レギュレーターはすべての素数 p に対して定義できる点で新しい。また、それまで「Rubin の公式」として知られる Kato のゼータ元と p 進 L 関数に関する公式を、我々は完全に一般的な状況に拡張することができた。より詳しく述べると、Rubin の公式は「階数 1」の場合にしか意味をなさないが、我々はそれを階数が 1 より大きい「高階」の場合に一般化した。Rubin の公式は多くの研究者により近年活発に研究されているが、階数が 1 より大きい場合を扱う我々のアプローチはそれまでにない新しいものである。これらの結果は論文 [3] にまとめた。

さらに、我々は Mazur-Tate-Teitelbaum 予想の類似である Mazur-Tate 予想も楕円曲線に対する MRS 予想から従うことを示した。特にその帰結として、Perrin-Riou 予想から Mazur-Tate 予想の特別な場合が従うことも示した。Perrin-Riou 予想と Mazur-Tate 予想も、それまで全く関連性が見出されていなかったものであり、我々の着眼点は新しい。Perrin-Riou 予想はいくつかの場合に解決されており、結果として、Mazur-Tate 予想の部分的な解決も得られた。この結果は論文 [4] にまとめた。

以上のように、楕円曲線に対する MRS 予想に関しては多くの思いがけない新しい興味深い結果が得られた。この過程で得られたいくつかのアイデアはさらに発展させることが可能であると思われる。Heegner 点、肥田族、モジュラー曲線に対する MRS 予想などまだまだ新しいことができると思われる。

研究成果の発表・関係学会への参加状況等

- 2018 年 9 月に University of Exeter (イギリス) で開催された研究集会 “Stark Conjectures, Iwasawa theory and related topics” に参加し、研究者と意見交換・情報収集を行なった。
- 2019 年 4 月に University College Dublin (アイルランド) の Kazim Buyukboduk 氏を訪問し、議論を行なった。
- 2019 年 6 月に University of Bordeaux (フランス) で開催された研究集会 Iwasawa 2019 に参加し、研究者と意見交換・情報収集を行なった。

- 2019 年 7 月に Ludwig Maximilian University of Munich (ドイツ) の Werner Bley 氏を訪問し、議論し、セミナーで講演を行なった。また、University of Genova (イタリア) で開催された研究集会 “Recent advances in the arithmetic of Galois representations” に参加し、研究者と意見交換・情報収集をし、講演を行なった。
- 2019 年 11 月に再度 Buyukboduk 氏を訪問し、議論し、セミナーで講演を行なった。
- 2019 年 12 月に Autonomous University of Madrid (スペイン) の Daniel Macias Castillo 氏を訪問し、議論し、セミナーで講演を行なった。
- 2020 年 1 月から約 2 ヶ月間、Isaac Newton Institute (イギリス) で開催されたプログラム “ K -theory, algebraic cycles and motivic homotopy theory” に参加し、研究者と意見交換・情報収集を行い、セミナーで講演を行なった。
- 2020 年 2 月に University of Cambridge (イギリス) の John Coates 氏を訪問し、議論し、セミナーで講演を行なった。

参考文献

- [1] D. Burns, A. Daoud, T. Sano, S. Seo, On Euler systems for the multiplicative group over general number fields, preprint. arXiv:1906.01565
- [2] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On Stark elements of arbitrary weight and their p -adic families, to appear in Iwasawa 2017 proceedings.
- [3] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On derivatives of Kato’s Euler system for elliptic curves, preprint. arXiv:1910.07404
- [4] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On derivatives of Kato’s Euler system and the Mazur-Tate conjecture, preprint.
- [5] D. Burns, R. Sakamoto, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, II: the general theory, preprint. arXiv:1805.08448
- [6] D. Burns, R. Sakamoto, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, III: applications, preprint. arXiv:1902.07002
- [7] D. Burns, R. Sakamoto, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, IV: the multiplicative group, preprint. arXiv:1903.09509
- [8] D. Burns, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, to appear in Int. Math. Res. Not.
- [9] D. Burns, T. Sano, On functional equations of Euler systems, preprint. arXiv:2003.02153
- [10] D. Burns, T. Sano, On non-commutative Euler systems, preprint. arXiv:2004.10564
- [11] D. Burns, T. Sano, Reduced determinant functors, K -theory and zeta elements, preprint.

- [12] D. Burns, T. Sano, On p -adic families of special elements for rank one motives, preprint.
- [13] D. Burns, T. Sano, K.-W. Tsoi, On higher special elements of p -adic representations, to appear in Int. Math. Res. Not.