

令和 元 年 9 月 28 日

## 海外特別研究員最終報告書

独立行政法人 日本学術振興会 理事長 殿

採用年度 平成 29 年度

受付番号 519

氏 名 松本 圭彦

(氏名は必ず自署すること)

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。

なお、下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

### 記

1. 用務地（派遣先国名）用務地： スタンフォード (国名： アメリカ合衆国)

2. 研究課題名（和文）※研究課題名は申請時のものと変わらないように記載すること。

漸近的対称空間の幾何解析と放物幾何の研究

3. 派遣期間： 平成 29 年 8 月 30 日 ～ 令和 元 年 8 月 29 日

4. 受入機関名及び部局名

スタンフォード大学 数学科

(研究・調査実施状況及びその成果の発表・関係学会への参加状況等)

(注)「6. 研究発表」以降については様式 10—別紙 1~4 に記入の上、併せて提出すること。

### (1) 研究の目的

はじめに、所期の目的を振り返る。

本研究の内容は主として微分幾何学に属する。双曲空間の幾何・解析と球面の共形幾何・解析の間に深い関係があることはよく知られているが、その一般化にあたる研究領域として、「漸近対称空間」とよばれる非コンパクトな空間と、無限遠境界の「放物幾何」との関係を調べるといったものがある。本研究の目的は、このトピックに新たな本質的進展をもたらすこと、すなわち過去にない視点ないしアプローチを提示することにある。

「漸近対称空間」は双曲空間の一般化にあたるのだが、ここでは 2 段階の一般化が行われている。まずそれを説明する。

各々の漸近対称空間には、その「モデル」とよばれる空間がある。「モデル」となりうるのは、いわゆる対称空間である（正確には非コンパクト型 Riemann 対称空間）。漸近対称空間には、まずはそのモデルにあたる対称空間の性質が色濃く反映されているだろうというのが、この研究領域における基本的な考え方である。その様子を把握し、さらにその先に生じる空間ごとの微妙な差異をとらえたいのだ。

ところで、双曲空間とはモデルとなりうる対称空間のなかで最も基本的なものにあたる。したがって、漸近対称空間のなかで、双曲空間をモデルとする「漸近双曲空間 (AH 空間)」というのは最も基本的な対象となる空間の一群である。双曲空間を AH 空間へと一般化したことで、一般化の第 1 段階が行われたことになる。

そして、双曲空間から始まる対称空間のリストは、「複素双曲空間」、「四元数双曲空間」、……と続く。これらの多様な対称空間についても、双曲空間の場合と同様に、それをモデルとする漸近対称空間を考える。これが一般化の第 2 段階である。なお、ここで名称について触れておくと、たとえば複素双曲空間をモデルとする漸近対称空間は、当然だが「漸近複素双曲空間 (ACH 空間)」とよばれることになる。以降も同様である。

ここで一つ注意すべきことがある——実は「あらゆる対称空間について、それをモデルとするような漸近対称空間の概念が明確に確立している」わけではない。「漸近対称空間」という言葉は 0. Biquard が 1999 年に用いはじめたのだが、これは AH 空間や ACH 空間の研究が積み重ねられるなかで、ある意味で「一般に『漸近対称空間』とよぶべき対象が存在するだろう」ということを「予言」したということである。そしてその「予言」は、まだそれほど実現しているわけではない。漸近対称空間たちの世界は、全体としてはまだヴェールに覆われている。漸近対称空間の研究は、「何を漸近対称空間とよぶべきなのか」という問題を含んでいる。

本研究において「過去にない視点ないしアプローチ」を提示するとしたのはつまり、漸近対称空間というのが何であるべきか、その視点を揺り動かすような研究を行うという意味である。

海外特別研究員事業への申請にあたって、松本は、具体的に次のような「過去にない視点ないしアプローチ」を述べた。それは「漸近対称 Einstein 空間 (Einstein 方程式をみたす漸近対称空間)」について、そこに『付加的な幾何構造』が存在するかを問う」というものである。

漸近対称空間の研究において、Einstein 方程式とよばれる、Riemann 計量のみたすべき偏微分方程式をとりあげることは、標準的なアプローチとして確立している (AH 空間については 1980 年代、特殊なタイプの ACH 空間については 1970 年代からあり、Biquard が 2000 年に広いクラスの漸近対称空間について行ったのも Einstein 方程式の考察である)。だからその点は新しくない。核心は「付加的な幾何構造」にある。これを問題とするのは松本には自然なことに思われた。すなわち、この分野における過去の研究のなかでは、漸近対称空間とは技術的には「ある種の特別な Riemann 計量を備えた空間」にすぎなかったのだが、その取り扱い、漸近対称空間が本来「対称空間をモデルとする幾何学的空間」であるという考えに立ち返るならば不十分だと考えたのである。

今回の派遣において遂行すべき第一の課題は、その具体的な問いに取り組むことだった。一方で、さらに、漸近対称空間と放物幾何に関するその他の「過去にない視点ないしアプローチ」を探索し追究することも、所期の目的の一部として存在していた（というよりも、長期的視点からいえばそちらのほうが重要なことだ）。

このたびは、以下に述べるように、どちらの観点からも進展が得られたものと考えている。

## (2) 研究実施状況

本派遣期間中、通常時はスタンフォード大学にて提供していただいたオフィスに出勤した。自身で研究を進め、また受入研究者の R. Mazzeo 氏と日常的に討議を行った。スタンフォード大学に在籍する他の研究者とも、しばしば研究上の交流の機会をもった。またアメリカ国内をはじめとする他機関にも積極的に出張し、研究連絡を行った。

(1) の最後に述べた具体的な研究課題である「漸近的対称 Einstein 空間について、そこに『付加的な幾何構造』が存在するかを問う」というものについては、状況は以下のとおりである。Mazzeo 氏に加えて、O. Biquard 氏とも連絡をとりながら研究を実施した。

- 第一に、「付加的な幾何構造」がどのようなものであるべきか、とくに ACH 空間の場合に関する検討材料を得る目的で、ACH-Einstein 空間の例を系統的に構成する手法の開発に取り組んだ。もっと具体的には、空間が「 $Sp(n)$  不変性」ないし「 $Sp(n)Sp(1)$  不変性」という対称性を持つことを要請し、そのことによって問題を単純化して解くことを試みた。文献調査の結果、同様のアプローチを採用して研究を進めている研究者がいるが、満足いく結論は得られていないことがわかった。これは問題の価値の大きさを示す事実であるともいえる。

類似の問題として、『 $SU(n)$  不変性』をもつ AH-Einstein 空間を系統的に構成する」というのも考えられる。これには特定の次元（4 次元）の場合に H. Pedersen が解答を与えていたが、高次元の場合はやはり未解決問題だった。

2 つの問題をあわせて検討する中で、後者（AH 空間に関する問題）については、1980 年代の D. N. Page と C. N. Pope による手法を利用して解決できることがわかった。これについて執筆した論文が Proc. Amer. Math. Soc. 誌に掲載された。

本来の ACH 空間に関する問題についても、この手法をうまく改変して利用できる可能性はおおいにあると思われる。だがそれは派遣期間中には完成しなかった。継続して検討する予定である。

- 第二に、「付加的な幾何構造」とは何かということと、「その存在証明が、過去の知見と自然に接続するような形で可能であること」および「汎関数の臨界点であること」という二つの指針にもとづいて考察した。Einstein 方程式は Riemann 計量に関する Einstein-Hilbert 汎関数から現れる。したがって、「Riemann 計量+付加的な幾何構造」に対するよい方程式を得るためにも、適切な汎関数を探すアプローチは有望と思われた。

ACH 空間に関する「Riemann 計量+付加的な幾何構造」として、ここでは「概 Hermite 構造」を採用することにした。これに課すべき方程式を、汎関数を通じて探すのである。

はじめに、概 Hermite 構造について利用できる可能性のある汎関数を調査した。（このような方針をとったということは、「概 Hermite 構造が必ずしも Einstein 方程式を満たさなくてもよい」という考え方をしたことをも意味している。中間報告で触れたように、Einstein 方程式にはさまざまな意味で利点があるが、それは絶対的な要請というわけではない。だからこの時点ではそうしたのである。）だがその調査の結果、この見方では、臨界点の存在証明がうまく行えるようなよい汎関数は存在しないことがわかった。

そこで方針を変えた。具体的には、Einstein 方程式を満たす Riemann 計量はすでに与えられ固定されている状況を前提とし、それを概 Hermite 構造とするような付加構造（つまり Riemann 計量と両立する概複素構造）に対する汎関数を考察することにした。この見方にもとづけば、期待したような形で臨界点の存在証明が得られるような汎関数が実際に存在することが判明した。そのような汎関数は、実際には自由に指定できる 1 つのパラメタをもった形で現れる。それらのうち最も簡明と思われるものについて、臨界点の存在証明を述べた論文を執筆した。

このほかに、その他の「過去にない視点ないしアプローチ」を探索することに関わる、以下に挙げる研究にも取り組んだ。

- ACH 空間に収束するような AH 空間の族に対する、幾何的線型偏微分方程式の一般的な解析

- これは Mazzeo 氏との共同研究である。その発端は、上に述べた、本派遣期間中に得られた「 $SU(n)$  不変性を持つ AH-Einstein 空間の系統的構成」だった。この構成によって得られた一連の AH 空間（専門的には AH 空間の「族」という言い方をする）は、ある ACH 空間（実は複素双曲空間）に収束することが観察される。この状況をより一般的視点から理解する目的で始めたのがこの研究である。幾何的線型偏微分方程式の一般的な解析を行うことができると、既存の ACH-Einstein 空間を利用して、新たな AH-Einstein 空間の存在を証明することもできるものと期待される。

派遣期間中、あるアプローチにもとづいた解決に取り組んだが、結果としては技術的困難を乗り越えることができなかった。派遣期間を終える前に別のアプローチを考案し、

引きつづき解決に向けて Mazzeo 氏と共同作業を行うことにした。

- Heisenberg 群における等周不等式の研究
  - A. Malchiodi, G. Citti (以上イタリア), J.-H. Cheng (台湾), Y. Wang, J. Tyson, L. Capogna, P. Yang (以上アメリカ) の各氏との共同研究である。2017 年 11 月に American Institute of Mathematics で行われた研究集会に端を発している。「Heisenberg 群」というのは複素双曲空間の無限遠境界である(正確には無限遠境界から 1 点を取り除いたもの)。したがって Heisenberg 群における幾何学的諸問題の知見を深めることは、ACH 空間や他の漸近的対称空間を研究するにあたり、基本的な重要性をもつ。中間報告の時点では、それから間もなく成果が出るように思われたが、その後根本的な難点の見落としがあったことが判明し、研究はふりだしに戻った。とはいえ、この重要かつ基礎的な問題についての理解が深まったこと、またその過程で各氏との研究上のつながりを強めることができたことは意義があったといえるだろう。
- 「内側を幾何構造で満たす」ことが意味を持つような放物幾何の分類
  - A. Waldron 氏との共同研究。2018 年 4 月のカリフォルニア大学デイヴィス校訪問から始まった。「漸近的対称空間」の無限遠境界には幾何構造があり、それらは最も一般的な言葉でいえば「放物幾何」とよばれるものになっている。たとえば、AH 空間の無限遠境界には「共形幾何」が、ACH 空間の無限遠境界には「CR 幾何」がある。放物幾何には代数的な分類があるが、ここでの問題は、どの放物幾何が漸近的対称空間の無限遠境界に現れ得るかということである。(1)で触れたとおり、漸近的対称空間一般には、まだ明確な定義があるとはいえない。この取り組みは、それを自然な形で明らかにするためのひとつのアプローチである。
- 滑らかでない境界を持つ漸近的対称空間の概念と幾何学
  - L. Capogna 氏との共同研究。2017 年 11 月に American Institute of Mathematics で氏にお会いして、その後 2018 年 5 月にウスター工科大学を訪問したことからはじまっている。これもある意味では「漸近的対称空間」の定義に関わる。「漸近的対称空間」の考えそのものは、突き詰めると、必ずしも無限遠境界が滑らかであることを要請しないものと考えられる。そうだとすれば、無限遠境界が滑らかとはかぎらない漸近的対称空間において、たとえば調和関数の漸近的 Dirichlet 問題、あるいは調和写像(P. Li と L. F. Tam, H. Donnelly, および松本と芥川和雄氏による研究がある)や「Fefferman の写像定理」と呼ばれる C. Fefferman の定理は、どのような形で定式化され証明されるのか。それがここでの問いである。

### (3)関係する学会への参加状況等

派遣期間中、以下のように、学会および各大学で定期的に行われるセミナーに参加し(その一部では講演を行い)、また関連研究者を訪問するなどした。

- スタンフォード大学数学科幾何学セミナー(Geometry Seminar)、解析学・偏微分方程式セミナー(Analysis & PDE Seminar)、談話会(Colloquium)
  - いずれもほぼ毎週開かれ、アメリカ国内外から講演者が招かれる。松本も 2018 年 1 月 24 日と 2019 年 2 月 20 日の 2 回、幾何学セミナーで講演を行った。
- Analysis and Geometry on Pseudohermitian Manifolds(American Institute of Mathematics, San Jose, カリフォルニア州, 2017 年 11 月 6 日~10 日)
  - CR 幾何学に関する研究集会。招待を受けて参加した。数学の研究集会としては独特な形式で、各日午前中は通常の研究講演が行われるが、午後は新しい問題の提起とグループに分かれての討議にあてられる。(2)で述べたように、ここでスタートした共同研究が現在も進行中である。松本も重要な役割を担っているといつてよいと思う。
- Geometric Analysis in Geometry and Topology 2017 (東京理科大学森戸記念館, 東京都新宿区, 2017 年 12 月 19 日~22 日)
  - 幾何学(とくに幾何解析)に関する研究集会。日本に一時帰国して、組織委員の一人として、また講演者の一人として参加した。4 人の講演者が 4 時間ずつの講演を行い、担当するテーマについて、背景の説明にも十分に時間を割きながら解説する。例年は国外からの講演者が中心だったが、この回は予算不足のため全員が日本国内の講演者となった。レベルは低くなかったと思うが、次回こそは再び国際色を強めたいという思いが残った。
- カリフォルニア大学リバーサイド校微分幾何学セミナー(Differential Geometry Seminar)(Riverside, カリフォルニア州, 2018 年 1 月 26 日)

- 招待を受けて講演を行った。
- Southern California Geometric Analysis Seminar (University of California, Irvine, Irvine, カリフォルニア州, 2018 年 1 月 27 日～28 日)
  - カリフォルニア大学リバーサイド校のご厚意により、1 月 26 日のセミナー講演に関する出張の旅程に含めていただいた（ただし 27 日の宿泊は自費である）。アメリカ国内外の一線級の研究者が招かれ、非常に刺激的な講演が行われた。
- カリフォルニア大学デイヴィス校訪問 (Davis, カリフォルニア州, 2018 年 4 月 12 日～13 日)
  - 招待を受けて A. Waldron 氏を訪問し、共同研究を始めることにした。量子数学・物理学セミナー (QMAP Seminar) における講演も行った。
- ウスター工科大学訪問 (Worcester, マサチューセッツ州, 2018 年 5 月 6 日～11 日および 2019 年 4 月 14 日～17 日)
  - 招待を受けて L. Capogna 氏を訪問し、共同研究について討議した。
- Asymptotically Hyperbolic Manifolds (Banff International Research Center, Banff (カナダ), 2018 年 5 月 14 日～18 日)
  - 招待を受けて参加した。まさに AH 空間を中心的な話題とする研究集会である。特色として、物理学者が多数参加しており、この分野の数学者からは普段あまり聞かないような話題についての講演を多く聞くことができた。
- Minimal Surfaces and Mean Curvature Flow (2018 年 7 月 6 日～8 日)
  - スタンフォード大学で開かれた研究集会。極小曲面論に関する研究動向をある程度まとまった形で理解することができた。Einstein 方程式の研究とも共通性がある。
- Analytical problems in conformal geometry and applications (Universität Regensburg, Regensburg (ドイツ), 2018 年 9 月 17 日～21 日)
  - 招待を受けて参加し、講演を行った。AH 空間の無限遠境界がもつ幾何構造である「共形構造」を中心とする研究集会である。
- パリ高等師範学校訪問 (Paris (フランス), 2018 年 9 月 24 日～28 日)
  - O. Biquard 氏を訪問し、研究上の討議を行った。
- ワシントン大学 (Seattle, ワシントン州, 2018 年 11 月 28 日～29 日)
  - 招待を受けて R. Graham 氏を訪問し、研究上の討議を行った。J. Lee 氏とも討議を行った。また微分幾何学セミナーで講演をした。
- 2019 Taipei Conference on Geometric Invariance and Partial Differential Equations (中央研究院, 台北 (台湾), 2019 年 1 月 8 日～14 日)
  - 招待を受けて参加し、講演を行った。中心的な内容は AH 空間および ACH 空間、またそれらの無限遠境界にあたる共形多様体、CR 多様体であった。
- ペンシルヴェニア州立大学訪問 (State College, ペンシルヴェニア州, 2019 年 2 月 4 日～8 日)
  - 招待を受けて J. Case 氏を訪問し、研究上の討議を行った。また幾何学セミナーで講演をした。
- プリンストン大学訪問 (2019 年 4 月 7 日～12 日)
  - 招待を受けて S. McKeown 氏を訪問した。McKeown 氏のほか、P. Yang 氏とも研究上の討議を行った。幾何学セミナーでの講演も行い、また A. Chang 氏の講義を 2 回聴講する機会も得た。
- AMS Spring Eastern Sectional Meeting “Sub-Riemannian and CR geometric analysis” (University of Connecticut, Hartford, コネチカット州, 2019 年 4 月 12 日～14 日)
  - 招待を受けて参加し、講演を行った。
- Park City Mathematics Institute (Park City, ユタ州, 2019 年 6 月 30 日～7 月 7 日)
  - 招待を受けて参加した。
- Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XXI (湘南国際村センター, 神奈川県葉山町, 2019 年 7 月 13 日～16 日)
  - 複素解析学に関する研究集会。日本に一時帰国して、組織委員の一人として参加した。14 人の講演者のうち、8 人は海外からの招待講演者である。