（様式10）

（海外特別研究員事業）

平成　31年　4月　1日

海外特別研究員最終報告書

独立行政法人 日本学術振興会 理事長　殿

採用年度　29

受付番号　70

氏　　名　前田　瞬

（氏名は必ず自署すること）

海外特別研究員としての派遣期間を終了しましたので，下記のとおり報告いたします。

なお，下記及び別紙記載の内容については相違ありません。

記

1. 用務地（派遣先国名）用務地：　TEXAS A&M Uuniversity (Commerce)　（国名：米国　　　　　）
2. 研究課題名（和文）※研究課題名は申請時のものと違わないように記載すること。

   調和写像の一般化における未解決問題と幾何解析
3. 派遣期間：平成　29年　4月　1日　～　平成　31　年　3月　26日
4. 受入機関

   Texas A&M University (Commerce)

平成 31 年 4 月 1 日

8. 所期の目的の遂行状況及び成果

「研究成果」

研究結果は以下の通りである：

I. 論文 [4] において，Ye-Lin Ou 教授との共同研究により以下の研究結果を得た。

1. 空間形内のアインシュタイン超曲面 $M^m \hookrightarrow (N^{m+1}(C), h)$ $(m \geq 3)$ が 2 重調和であるための必要十分条件は (1) 極小，もしくは (2) 第 2 基本形式のノルムの 2 乗が mC となることである。さらに (2) の場合はその超曲面のスカラー曲率は $m(m-2)C + m^2H^2 > 0$ となる，ここに H は M の平均曲率を表す。

   この系として次を得た。

2. ユークリッド空間及び双曲空間内の 2 重調和アインシュタイン超曲面は極小である。

   また，球面内のコンパクトな 2 重調和部分多様体についてはスカラー曲率一定のもと次の結果を得た。

3. 球面内のコンパクトかつスカラー曲率一定な 2 重調和部分超曲面は (1) 極小，もしくは (2) 平均曲率が一定でありかつ，第 2 基本形式のノルムの 2 乗が m となる。

4. アインシュタイン定数がドメインの次元以下となるアインシュタイン多様体内のコンパクトアインシュタイン超曲面が 2 重調和となる必要十分条件は (1) 極小，もしくは (2) 第 2 基本形式のノルムの 2 乗が mC となることである。さらに (2) の場合はその超曲面のスカラー曲率は $m(m-2)C + m^2H^2 > 0$ となる。

5. 非正曲率を持つアインシュタイン多様体内のコンパクトかつスカラー曲率一定な 2 重調和超曲面は以下のいずれかを満たす場合，極小である。
   (a) ある $2 < p < \infty$ に対して，$|\nabla H| \in L^p$.
   (b) $|\nabla H| \in L^2$ かつリッチ曲率が下から $-c\{1 + r^2(x)\}$ により抑えられている，ここに，$r(x)$ は M 上の距離関数である。

   その系として次を得た。

6. ユークリッド空間内のスカラー曲率一定な完備 2 重調和超曲面であり，ある $2 < p < \infty$ に対して，$|\nabla H| \in L^p(M)$ の条件を満たすものは極小である。

7. 球面内のスカラー曲率一定な完備2重調和超曲面で $H^2 \geq \frac{2\varepsilon+4}{m(5m+4)}$ $(\varepsilon > 0)$ の条件を満たすものは次のいずれかの条件を満たすとき平均曲率一定である.

(A) M のリッチ曲率が下から抑えられており，$|\nabla H|$ が上から抑えられている。

(B) ある $2 < p < \infty$ に対して，$|\nabla H| \in L^p$.

(C) $|\nabla H| \in L^2$ かつリッチ曲率が下から $-c\{1+r^2(x)\}$ で抑えられている。

II. 現時点で研究中であるが，Ye-Lin Ou, Yu Fu との共同研究により，$\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ 内の semi-parallel 2重調和超曲面の分類定理を与えた。特に，totally umbilical な2重調和超曲面及び，平坦な2重調和曲面の分類定理を与えた。更にどう論文において次の結果を示した。

1. $\varphi : (M^m, g) \to (N, g^N) = (L^m \times \mathbb{R}, g^L + dt^2)$ を完備2重調和超曲面でリッチ曲率が非正であるとする。ここで，L はアインシュタイン多様体である。もし，
$$\int_M H^p dv_g < +\infty, \quad \text{for some } p > 2,$$
かつ，ある $q > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ に対して
$$\int_M (\log^{(k)} \frac{e^{(k)}}{\theta^2 + \varepsilon})^q dv_g < +\infty,$$
を満たすとする。このとき，M は極小もしくは vertical cylinder である。すなわち，$\varphi(M) = \phi(M^{m-1}) \times \mathbb{R}$, ここで，$\phi : M^{m-1} \longrightarrow L^m$ はアインシュタイン多様体 L の2重調和超曲面である。

2. $\varphi : (M^m, g) \to (N, g^N) = (L^m \times \mathbb{R}, g^L + dt^2)$ を完備2重調和超曲面でリッチ曲率が非正であるとする。ここで，L はアインシュタイン多様体である。もし，

(1) 平均曲率 H が調和で下からある定数で抑えられているとする，もしくは

(2) 角度関数 θ が調和かつ超曲面のスカラー曲率が一定であるとする。

このとき，M は極小もしくは vertical cylinder である。すなわち，$\varphi(M) = \phi(M^{m-1}) \times \mathbb{R}$, ここで，$\phi : M^{m-1} \longrightarrow L^m$ はアインシュタイン多様体 L の2重調和超曲面である。

以上の研究は Chen 予想及び BMO 予想 (Balmuş-Montaldo-Oniciuc 予想) の肯定的部分的解決である。

上述した研究ではアインシュタイン空間及び空間形内の2重調和部分多様体の研究を行ったが，更に，アインシュタイン空間を含むリッチソリトン，及び山辺ソリトン内の部分多様体の研究も行い，次の III, IV, V の結果を得た。

III. 論文 [1] において，瀬古竜也氏との共同研究により次の結果を得た。なお，この研究では山辺ソリトンの一般化である almost 山辺ソリトンを扱っているが，全ての結果は山辺ソリトンに適応できる：

1. コンカーレントベクトル場を持つ almost 山辺ソリトンは勾配 almost 山辺ソリトンである。

2. コンカーレントベクトル場を持つコンパクトな almost 山辺ソリトンは自明なものしか存在しない。

3. コンカーレントベクトル場を持つ山辺ソリトンは勾配拡大山辺ソリトンであり，スカラー曲率は 0 となり，山辺ソリトンに現れる定数は -1 となる。

   さらに部分多様体としての almost 山辺ソリトンを考え，次の分類結果を得た。

4. ユークリッド空間内の超曲面の almost 山辺ソリトンで，山辺ソリトンに現れるベクトル場がユークリッド空間内の位置ベクトルの接方向でかける時，これは超平面もしくは球面に含まれる。

   さらに B.L. Chen のリッチ流の研究結果を用いて次の結果を得た：

5. (1) ユークリッド空間内の完備極小部分多様体の勾配リッチソリトンはアファイン部分空間。
   (2) 双曲空間内の完備極小部分多様体の勾配リッチソリトンは存在しない。

IV. 論文 [3] において，山辺ソリトンの研究を行い，次の結果を得た。

1. 非正リッチ曲率を持つ安定，もしくは縮小完備勾配山辺ソリトンがもし，ある $0 < p < \infty$ に対して，$R \in L^p(M)$ を満たすなら，リッチフラットとなる。

2. 非正スカラー曲率とある非負関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ に対して，$\mathrm{Ric} \geq \varphi R g$ を満たす安定もしくは縮小完備勾配山辺ソリトンは，もし，ある $0 < p < \infty$ に対して，$R \in L^p(M)$ を満たすなら，スカラー曲率 0 となる。

V. 論文 [2] において山辺ソリトンの研究を行い，3 次元 divergence-free Cotton tensor を持つ勾配山辺ソリトンの分類定理を与えた。特に，3 次元 divergence-free Cotton tensor を持つ勾配安定山辺ソリトンは回転対称なもののみであることを示した。

[論文]

1. Tatsuya Seko and Shun Maeta,
Classification of almost Yamabe solitons in Euclidean spaces,
Journal of Geometry and Physics. Vol 136, 2019, pp.97-103. (arXiv:1711.04428 [math DG]).

2. Shun Maeta,
3-dimensional complete gradient Yamabe solitons with divergence-free Cotton tensor,
submitted (arXiv:1806.00795 [math DG]).

3. Shun Maeta,
Complete Yamabe solitons with finite total scalar curvature,
submitted (arXiv:1711.07623 [math DG]).

4. Shun Maeta and Ye-Lin Ou,
Some classifications of biharmonic hypersurfaces with constant scalar curvature, submitted (arXiv:1708.08540 [math DG]).