

関数空間と実解析・調和解析の理論およびその応用

解析学、応用数学およびその関連分野



研究者所属・職名 : 大学院理工学研究科・教授

ふりがな なかい えいいち

氏名 : 中井 英一

主な採択課題 :

- [基盤研究\(C\)「変動する指標をもつ関数空間を基礎とした調和解析とその応用」\(2012-2014\)](#)
- [基盤研究\(B\)「実解析・調和解析に由来する関数空間の理論の深化と応用」\(2015-2019\)](#)
- [挑戦的研究\(萌芽\)「多変数フーリエ級数の収束問題とガウスの円問題」\(2017-2020\)](#)

分野 : 実解析、調和解析

キーワード : 関数空間、積分作用素、変動指数、平均振動量、掛算作用素、フーリエ級数

課題

●なぜこの研究をおこなったのか？(研究の背景・目的)

連続性や可積分性など、適当な条件を満たす関数の集合はベクトル空間になる。これを関数空間という。以前から研究が深められている古典的な関数空間は、連続性や可積分性が位置によらず一定な関数の空間であるが、近年、工学的応用の観点から、位置に応じて連続性や可積分性が変動する関数の空間が注目されるようになり、盛んに研究されるようになった。本研究では、こうした背景をもとに、これまで長年にわたって研究が積み重ねられてきた実解析・調和解析の理論を、変動する指標をもつ関数空間の視点から深化させ、応用範囲のより広い理論へと発展させることを目的とする。

●研究するにあたっての苦労や工夫(研究の手法)

これまでの実解析・調和解析は、関数の可積分性や連続性が一様な関数空間を基盤として研究がなされてきた。このため、変動する指標をもつ関数空間では、従来の方が使えないことが多い。本研究では、無関係に進められてきた研究を相互に結び付けるなど様々な工夫を行った。多方面からの考察が必要であるため、国際研究集会を開催するなど多数の研究者と情報交換を行って共同研究に結び付けた。

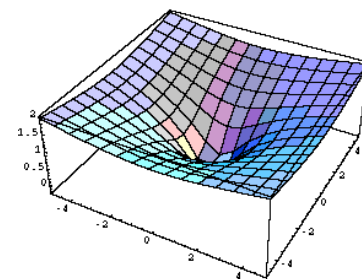


図1 調和関数かつ有界平均振動関数の例

関数空間と実解析・調和解析の理論およびその応用

解析学、応用数学およびその関連分野

研究成果

●どんな成果がでたか？どんな発見があったか？

解析学の基本である微分や積分は、関数に関数や数に対応させる演算であり、この演算は関数空間から関数空間への作用素となる。古典的な関数空間にも様々な種類があり、導入された動機も、フーリエ級数の収束問題や微分方程式の解の性質を調べるためなど多様である。しかし、その後は、微分作用素や積分作用素の研究とともに、各々の関数空間の理論が整備され、また互いの関係も明らかになるなど、体系的な研究が進んでいる。

近年は、「変動指数をもつ関数空間」が導入され盛んに研究されているが、本研究では、これまでの理論をさらに発展させ、応用範囲を広げるために、「変動増大度・変動平均振動量をもつ関数空間」を体系的に研究し、各種の作用素の有界性やコンパクト性を証明するなど、非常に多数の成果を得て、これまでの実解析・調和解析の理論を深化させた。また、関数に関数を掛算するという基本的な作用素の研究を行った。この研究はそれ自体興味ある研究対象であるだけでなく、基本的な作用素であるがゆえに、その研究成果は他の研究にも大変役立つことが多い。実際、「変動平均振動量をもつ関数空間」は、有界平均振動関数の空間BMO上の掛算作用素の特徴づけのために研究代表者らにより導入されたものであるが、20年後に「変動指数をもつ関数空間」上の最大作用素の有界性の証明に利用された。本研究においても、「変動平均振動量をもつ関数空間」は「変動指数をもつ関数空間」の双対空間であることを証明した。さらに確率論や流体力学の基本方程式にも応用することができた。

もう一つの研究として、「多変数フーリエ級数の収束問題」と「ガウスの円問題に関するハーディー予想」の相互関係を明らかにした。前者はフーリエ解析学発展の元になった難問でいまだに不明な点が数多く残されている。また、後者は解析的整数論における百年来の未解決問題である。この一見無関係に見える2つの大問題が、実は互いに同値であることを発見した。

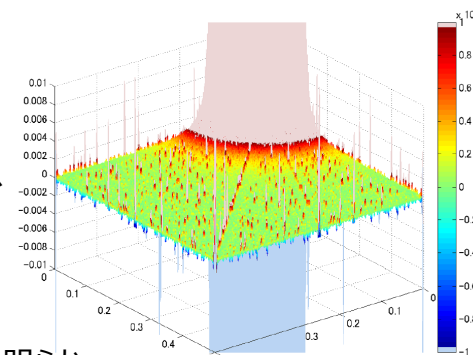


図2 多変数フーリエ級数における倉坪現象

今後の展望

●今後の展望・期待される効果

古典的な関数空間を基礎とする実解析・調和解析の理論は、これまでの研究の蓄積が膨大であり、まだまだ、変動する指標を持つ関数空間に活かしきれていない部分が多い。今後も、研究を続ける必要があるが、ここまでの研究だけでも、多くの基礎理論と確率論や流体力学への応用を提供できた。さらに、確率論や流体力学の理論は、様々な工学分野で利用されて我々の生活に多大な恩恵をもたらす。

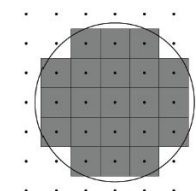


図3 ガウスの円問題