北海道大学
研究推進部研究振興企画課
（mail：kakenhi@research.hokudai.ac.jp）

作成日：2020年2月13日
更新日：―

科研費 KAKENHI

関数空間の研究とその応用

研究者所属・職名：大学院理学研究院・准教授

ふりがな　こばやし　まさはる
氏名：小林　政晴

主な採択課題：

- 若手研究(B) 「偏微分方程式に対するモジュレーション空間からのアプローチ」(2012-2014)
- 若手研究(B) 「モジュレーション空間とその偏微分方程式への応用」(2016-2018)
- 基盤研究(C) 「モジュレーション空間とHRT予想の研究」(2019-2021)

分野：実解析、調和解析

キーワード：モジュレーション空間、窓フーリエ変換(短時間フーリエ変換)、シュレディンガー方程式

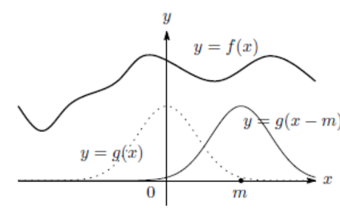
課題

●なぜこの研究をおこなったのか？（研究の背景・目的）

``モジュレーション空間”とよばれるある条件をみたす関数の集合がある。その起源は、ホログラフィーの研究でノーベル物理学賞を受賞したガボール氏が通信理論の研究において用いた``ガウス関数の平行移動と変調により生成される関数系を用いて、任意の関数をフーリエ級数展開のようにあらわす”というアイデアにある。モジュレーション空間に関して、これまでに多くの研究がなされ、近年シュレディンガー方程式と相性のよい関数空間として注目を浴びている。しかし、その背後にある数理構造は解明されていない。その仕組みを解明し、様々な方程式にも応用可能な解析的手法を確立するため、本研究をおこなった。

●研究するにあたっての苦労や工夫（研究の手法）

モジュレーション空間に関する研究はまだ日が浅く、重要にも関わらず未解決な問題が多くあり、従来の方法が使えないことが多い。本研究では``フーリエ変換とLp理論を経由する従来の方法”ではなく、``特別な窓関数を用いて方程式を窓フーリエ変換(短時間フーリエ変換)する方法”や``フーリエ変換と窓フーリエ変換を同時に用いる方法” を考案した。



$$g(x) = e^{-\pi x^2}$$
$$g_{mn}(x) = g(x-m)e^{2\pi i n x}$$
$$f(x) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn} g_{mn}(x)$$

図1 ガボールのアイデアのイメージ図

北海道大学
研究推進部研究振興企画課
（mail：kakenhi@research.hokudai.ac.jp）
作成日：2020年2月13日
更新日：—

科研費 KAKENHI

関数空間の研究とその応用

研究成果

●どんな成果がでたか？どんな発見があったか？

``特別な窓関数”を用いて自由粒子のシュレディンガー方程式を窓フーリエ変換すると``モジュレーション空間とシュレディンガー方程式の相性のよさ”を裏付ける一つの関係式が得られる(加藤-小林-伊藤 (2012))。このアイデアを基に、ポテンシャルをもつシュレディンガー方程式(例えば、調和振動子のシュレディンガー方程式)やシュレディンガー方程式以外の方程式(例えば、エアリー方程式)を考えた場合に、これらの方程式とモジュレーション空間を結びづけるような関係式が得られるのかを考察し、次の成果を得た。

①2次または劣2次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式に対しても``特別な窓関数”を用いて窓フーリエ変換すると``モジュレーション空間とポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の相性のよさ”を裏付ける関係式が得られた。その応用として、ポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解のモジュレーション空間型評価式を得た(加藤-小林-伊藤 (2014))。
②エアリー方程式の場合``特別な窓関数”を用いて窓フーリエ変換する方法だけでは、自由粒子のシュレディンガー方程式のように上手く関係式が得られないが、フーリエ変換と短時間フーリエ変換を同時に用いることで``モジュレーション空間とエアリー方程式の相性のよさ”を裏付ける関係式が得られた。この方法はシュレディンガー方程式やエアリー方程式を含むような高階分散型方程式に対しても応用可能であることがわかった(加藤-小林-伊藤-高橋 (2019))。

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

$$\Downarrow \text{ 短時間フーリエ変換 } V_{\varphi(t,\cdot)}$$

$$\begin{cases} (i\partial_t + i\xi\cdot\nabla_x - \frac{1}{2}|\xi|^2) V_{\varphi(t,\cdot)}(u(t,\cdot))(x,\xi) = 0 \\ V_{\varphi(0,\cdot)}(u(0,\cdot))(x,\xi) = V_{\varphi_0}u_0(x,\xi) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{\varphi(t,\cdot)}(u(t,\cdot))(x,\xi) = e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2} V_{\varphi_0}u_0(x-\xi t,\xi)$$

図2　自由粒子のシュレディンガー方程式とモジュレーション空間を結ぶ関係式

今後の展望

●今後の展望・期待される効果

シュレディンガー方程式に限らず、近年モジュレーション空間を様々な方程式(例えば、波動方程式やナビエ・ストークス方程式)や実解析・調和解析において重要な作用素(例えば、擬微分作用素やフーリエ積分作用素)の解析に応用する研究が盛んにおこなわれている。本研究で得られた手法やアイデアは、こうした問題を考える上でも効果的であると思われる。本研究では``モジュレーション空間とシュレディンガー方程式の相性”に注目して研究をおこなったが、考える問題に応じて、既存の関数空間だけではなく、新たな関数空間を導入し、その性質を調べることも重要であると思う。