

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料
〔平成31年度（2019年度）研究進捗評価用〕

平成28年度採択分
平成31年3月11日現在

数理解物理学の観点からの代数幾何学の新展開

New development of algebraic geometry viewed from theoretical physics

課題番号：16H06335

森脇 淳 (Moriwaki, Atsushi)

京都大学・大学院理学研究科・教授



研究の概要（4行以内）

京都大学に関わる数理解物理学と代数幾何学の世界的研究者と国内外の研究者を一つの研究グループとして束ね、交流を超えた数理解物理学と関連する代数幾何学の新しい数理現象の発見と新理論の構築を行い、数理解物理学の観点からの代数幾何学の新展開と国際的拠点の形成を図る。さらに、数学から数理解物理学への影響ある応用も目指す。

研究分野：代数幾何学、数理解物理学、アラケロフ幾何

キーワード：代数多様体、ゲージ理論、数論多様体、シンプレティック多様体

1. 研究開始当初の背景

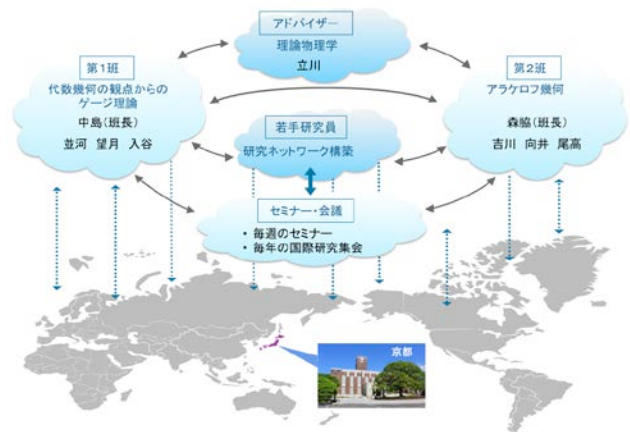
ゲージ理論、ミラー対称性、カラビ・ヤウ多様体論、シンプレティック多様体論、サイバーグ・ウィッテン理論、グロモフ・ウィッテン不変量、ドナルドソン・トーマス不変量等、代数幾何学、及び、複素幾何学と関連する数理解物理学の話題は尽きない。数理解物理学の観点は最近の代数幾何学の発展において必要不可欠なものになっており、新しい研究の芽はこの境界領域から次々と生み出されている。

2. 研究の目的

京都大学には数理解物理学と代数幾何学の双方に深く関わる世界的研究者が数多い。彼らと国内外の研究者を一つの研究グループとして束ね、交流を超えた数理解物理学と関連する代数幾何学の新しい数理現象の発見と新理論の構築を行い、数理解物理学の観点からの代数幾何学の新展開と国際的拠点の形成を図る。さらに、数理解物理学からの数学への応用のみならず、逆に数学から数理解物理学への影響ある応用も目指す。

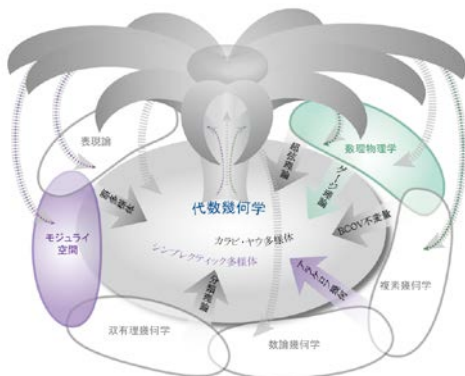
研究グループを二つの班に分け、研究を推進する。第一班は、中島・並河・望月・入谷から構成され、ゲージ理論の代数幾何学からの観点からの研究を中心に、中島を班長として研究を進める。第二班は、森脇・向井・吉川・尾高から構成され、数理解物理学に関わる数論幾何学（アラケロフ幾何）を中心に、森脇を班長として研究を進める。立川は、理論物理学者として、アドバイザーとしての役割を果たすとともに、数学と物理の両方に関わる研究を進める。毎年1回、第一線の研究者を集め、分野を限定した、または、総合的な国際シンポジウムを開催する。

4. これまでの成り



るが、ここではそれぞれの班のおもだった成果を記述するのみとする。

（第1班）ミラー対称性等の発展からわかるように、物理的直感から従う数理解物理学の成



果を如何に数学的に如何に厳密するかは大きな数学の課題であり、その過程から新しい数学の研究課題が数多く生まれてきた。その意味で数学、もしくは、代数幾何学は数理論物理学の多大な影響を受けてきた。Braverman、Finkelbergと本科学研究費の分担者(副代表)の中島による2016年に執筆したプレプリント (A. Braverman, M. Finkelberg, and H. Nakajima, Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $N = 4$ gauge theories, II, (2016)) では、ゲージ理論のクーロン枝を幾何学的表現論の手法を用いて、数学的に厳密な取扱を可能にした。これにより、多くの数学者が研究に参入した。この論文は理論物理学にも影響を及ぼし、未だにプレプリントであるが、すでに50以上の数学・理論物理学の論文から引用されている。その意味で、当初の目標である数学(代数幾何学)からの物理学への影響という逆方向の提案は達成しつつあると言える。

(第2班)体 K の絶対値からなる集合 Ω とそれ上の測度を固定し、任意の K^\times の元 a に対して $\log|a|_v$ の Ω 上での積分がゼロとなる構造をアデリック曲線という。この構造を用いるとラング流のheight関数の理論を一般化することができる。 K 上定義された射影代数多様体を固定すると、アデリック曲線上のアラケロフ幾何を展開することができる。Paris大学のChen氏との共同研究でアデリック曲線上のアラケロフ幾何の基礎理論を展開した。結果としてアラケロフ幾何の基本定理(算術的中井・モイシェゾンの豊富性の判定方法、算術的体積関数の連続性等)を確立した。基礎理論がほぼ完成し、その結果を450頁に及ぶ論文(本)(H. Chen & A. Moriwaki, Arakelov geometry over adelic curves)としてまとめ、最終稿の完成をめざしている。今後、出版を計画している。

5. 今後の計画

全体としては順調に計画が進んでおり、数学から数理論物理学に大きな影響を及ぼすに至っている。また、京都大学はカプリ数物連携宇宙研究機構を含めた形で国際的拠点の形成はできつつあると言える。その意味で今後もこの活動を続けていきたい。ここでは代表者の計画を中心に書くことにする。当面の最大の目標はアデリック曲線上の交点理論とリーマン・ロッホの定理(もしくは、ヒルベルト・サミュエルの定理)の確立であると思う。交点理論については、非自明な絶対値については局所的な交点理論はできているので、問題は次の2点に絞れる。まず、自明な絶対値を持つ場合の交点理論の確立である。これは自明な絶対値を持つ体上の曲線の場合はChen氏との共同研究で確立できた。さらに高次元化が求められる。次に局所的に

ある交点数をアデリック曲線上で積分することができるかという難しい問題が残っている。これらの考察を進め、リーマン・ロッホの定理を考えて行きたい。

6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)論文

Hodge-theoretic Mirror Symmetry for Toric Stacks, Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, Journal of Differential Geometry に掲載決定, 査読有.

Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras, Ryosuke Kodera and Hiraku Nakajima, String-Math 2016, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 査読有, 98, 49-78, 2018.

Introduction to a provisional mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $N=4$ gauge theories, Hiraku Nakajima, Modern Geometry: A Celebration of the Work of Simon Donaldson, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 査読有, 99, 193-211, 2018.

A characterization of nilpotent orbit closures among symplectic singularities, Y. Namikawa, Math. Ann. 査読有 370, 811-818, 2018.

A twistor approach to the Kontsevich complexes, Takuro Mochizuki, Manuscripta Mathematica, 査読有, 157, 193—231, 2018.

E8 instantons on type-A ALE spaces and supersymmetric field theories, N. Mekareeya, K. Ohmori, Y. Tachikawa, G. Zafrir, Journal of High Energy Physics, 査読有, 1709, 144, 2017.

著書

モデル-ファルティングスの定理 ~ディオファントス幾何からの完全証明~, 森脇淳、川口 周、生駒 英晃、200頁、2017。

7. ホームページ等 特になし