(様式7：電子媒体)
(若手研究者海外挑戦プログラム)

平成 30 年 11 月 15 日

若手研究者海外挑戦プログラム報告書

独立行政法人 日本学術振興会 理事長 殿

受付番号 201880061
氏名 中村昌平
(氏名は必ず自署すること)

若手研究者海外挑戦プログラムによる派遣を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。
なお、下記記載の内容については相違ありません。

記

1. 派遣先：都市名 バーミンガム (国名 イギリス)

2. 研究課題名（和文）：ある多重線型不等式とフーリエ変換の関連及びその応用

3. 派遣期間：平成 30 年 5 月 13 日 ～ 平成 30 年 11 月 11 日 (183 日間)

4. 受入機関名・部局名：University of Birmingham, School of Mathematics.

5. 派遣先で従事した研究内容と研究状況（1/2 ページ程度を目安に記入すること）

調和解析の分野における、最も重要な未解決問題の一つに、超曲面上の関数に対するフーリエ変換の振る舞いに関する問題がある（フーリエ制限予想）。通常、フーリエ制限予想は、R^n空間全体で、L^q-ノルムを測るが、今回従事した研究では、低次元の部分空間上で、フーリエ拡張作用素:$\widehat{gd\sigma}$ の振る舞いを定量的に研究した。より正確には、X：X-ray 変換及び、R：ラドン変換を用いて、$X\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right), R(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2)$ の振る舞い及び、これらがどの程度大きな値をとるのかを研究した。なお、$X\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right)$は、1次元部分空間、すなわち線分上に$gd\sigma$がどの程度、集中しているのかを測っており、これは、フーリエ制限予想に対する基本的なアプローチの一つである、ウェーブパケット分解を念頭にしている。他方、$R(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2)$は、n-1 次元部分空間上に$gd\sigma$がどの程度、集中しているのかを測っており、こちらは、$\left|\widehat{d\sigma}\right|^2$が$|x|^{n-1}$のように振る舞い、n-1 次元部分空間上でほぼ可積分関数であることを念頭にしている。
研究状況としては、まず、$X\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right), R(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2)$に対して、非自明な公式を発見した。特に、そのアイデアとして、X：X-ray 変換及び、R：ラドン変換が問題の空間次元をそれぞれ、1, n-1 次元分、減らす作用があることを発見した。その事実をうまく用いることによって、$X\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right), R(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2)$の、超平面全体のなすグラスマン多様体上の$L^qL^\infty$-ノルムを測り、定量的な結果を得た。

6. 研究成果発表等の見通し及び今後の研究計画の方向性（1/2 ページ程度を目安に記入すること）

本研究の研究成果は、一区切りついた、という意味で出そろっており、現在は、論文の形に洗練している状況である。したがって、１ヶ月を目処に、出来上がった論文を arXiv にアップロードするとともに、査読付き雑誌に投稿する予定である。

なお、今回の滞在中に、本研究の更なる発展に繋がる問題があることがわかった。すなわち、今回の研究では、$X\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right), R(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2)$の$L^q L^\infty$-ノルムを測ったが、より一般に$L^q L^r$-ノルムを測る事が有意義である事が判明した。また、それのみならず、より一般に k 次元部分空間に焦点を当てる、k-plane 変換: $T_{k,n}$を用いて、$T_{k,n}\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right)$の振る舞いを調べる事が有意義である事も判明した。一つの理由としては、必要条件を得るための、反例を構成する際に、我々は、全ての低次元部分空間を考えており、その意味で、1 次元部分空間に対応する X-ray 変換と、n-1 次元部分空間に対応する Radon 変換のみを考えるよりも、すべての次元の部分空間を考えるのが自然である。また、二つ目の理由として、双線型フーリエ制限問題との関連が挙げられる。双線型フーリエ制限問題とは、元のフーリエ制限予想を解決するために導入され、また、最近の予想に関する進展の基になっている。現在、我々の問題である、$X\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right), R(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2)$の振る舞いの問題に対して、n=3, q=r=2 の場合が、ある意味で、評価の端点であり、さらに、双線型の形で我々の問題を定式化すれば、肯定的な結果が得られる事まではわかっている。従って、双線型の形で定式化した問題から、どのようにして、元の我々の問題に対する結果を得るのか？という問題を解決しなければならない。

また、q=r の場合が、現在、スペインの研究チーム、特に David Beltran 氏と Luis Vega 氏が行なっている研究と、密接に関連している事がわかった。彼らは、更に、$T_{k,n}\left(\left|\widehat{gd\sigma}\right|^2\right)$に微分作用素を作用させて、その振る舞いを研究しているが、正則性を０に近づける事で、我々の問題と関わってくる。従って、今後は、この問題をスペインの研究チームと連絡を取り合いながら、解決していく予定である。また、本研究の、$\widehat{gd\sigma}$の低次元空間での振る舞いを調べる、というアイデアは、近年の Guth 氏らによる、polynomial partitioning と呼ばれる手法による、フーリエ制限予想の進展をモチベーションにしている。実際、そこでは、問題は、$\widehat{gd\sigma}$の代数多様体上での振る舞いに帰着される。そこで、最終的な今後の研究目標として、$\widehat{gd\sigma}$の振る舞いを、低次元空間のみならず、より複雑な代数多様体上で、明らかにする事が挙げられる。

7. 本プログラムに採用されたことで得られたこと（1/2 ページ程度を目安に記入すること）

イギリスは、調和解析が最も盛んに研究されている国の一つであり、従って、そのイギリスで、研究に従事できたことは、言うまでもなく非常に大きな経験となった。より具体的には、以下の３点が挙げられる。まず、滞在先のバーミンガム大学の調和解析グループは非常に規模が大きく、即ち多くの専門家が在籍しており、従って、一つの大学内で、日々様々な調和解析の諸問題に触れる事ができた。これは、将来的に研究をしていく上で、重要な経験であった。というのも、実際に研究を行う際の最初のステップである、問題を見つける、という点において、より多くの話題を知っているという点は、非常に有利に働くからである。

また、イギリスは地理的に、とても良い場所に位置しており、毎週行われるセミナーに、イギリスからのみならず、ヨーロッパ、アメリカなど様々な国から講演者を呼んでいた。従って、毎週、様々な国の最先端の研究成果を聞く事ができた。このことを体感できたのは、次の意味で良い経験であった。即ち、この地理的な優位性が、実際に、研究においても、優位に働く事があるということを身を以て実感できたという点である。

最後に、イギリスの数学者の、研究に対するアプローチを経験できた事が、最も大きな得られた事である。実際に、それは、自分が今まで経験し培ってきたそれとは、非常に異なったもので、イギリスに長期滞在し、研究に従事できたからこそ得られた経験である。