

平成 30 年 11 月 23 日

## 若手研究者海外挑戦プログラム報告書

独立行政法人 日本学術振興会 理事長 殿

受付番号 201880003

氏名 松坂 俊輝

(氏名は必ず自署すること)

若手研究者海外挑戦プログラムによる派遣を終了しましたので、下記のとおり報告いたします。  
なお、下記記載の内容については相違ありません。

### 記

1. 派遣先：都市名 Cologne (国名 Germany)
2. 研究課題名 (和文) : 調和マース形式のフーリエ係数の数論的考察
3. 派遣期間：平成 30 年 04 月 18 日 ~ 平成 30 年 10 月 31 日 (196 日間)
4. 受入機関名・部局名：Mathematical Institute, University of Cologne
5. 派遣先で従事した研究内容と研究状況 (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

【課題 1】金子による  $j$  関数のサイクル積分に関する数値実験・予想の定式化について  
金子は 2009 年の論文において  $j$  関数の実二次点での「値」というべきものを導入し、多くの観察・予想を与えた。この中のいくつかの予想について、採用期間中 (5 月) に Imamoglu-Bengoechea が観察の適切な定式化、および証明を与えた。研究代表者はこれを受け、金子と共に彼らの結果を簡略化し、より一般の場合についても同様の結果を得ることに成功した。これにより、提起した課題を部分的に解決するに至った。残りの観察・予想についても Imamoglu-Bengoechea, Beckwith, Li らと議論を重ねたが、現状証明の方針は立っていない。

【課題 2】サイクル積分の母関数の考察  
Duke らは 2011 年の論文において上記のサイクル積分のトレースの母関数が調和マース形式となることを示した。研究代表者はより一般に多重調和弱マース形式と呼ぶべき対象を導入し、その基本的な性質を示し、半整数重さの多重調和弱マース形式について、そのフーリエ係数があるモジュラー形式の CM 値、およびサイクル積分で与えられることを明らかにした。これにより、例えば Kronecker の極限関数のサイクル積分について、非自明な等式を無数に得ることができる。

【追加課題】双曲的アイゼンシュタイン級数について  
Pippich は 2016 年の論文において楕円型アイゼンシュタインに対し Kronecker 極限公式の類似を示しており、一方で双曲型については、極限関数の明示式を与えるに至らなかった。研究代表者は Schwagenscheidt と議論を重ね、この極限公式を  $j$  関数のサイクル積分を用いて明示的に与えることに成功した。また Li とこの結果を共有し、その数論的性質について議論を行った。

## 6. 研究成果発表等の見通し及び今後の研究計画の方向性 (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

採用期間中に以下の通り 1 件の論文が受理され、1 件の論文を投稿した。

1. T. Matsusaka, Polyharmonic weak Maass forms of higher depth for  $SL_2(\mathbb{Z})$ , accepted, Ramanujan journal.
2. T. Matsusaka, Traces of CM values and cycle integrals of polyharmonic Maass forms, submitted for publication, arXiv:1805.02064.

これらの結果については、日本国内外における研究集会、セミナーなどで講演予定である。残りの金子の観察の証明については、金子、Imamoglu らと議論を重ね、また研究代表者が課題 2、および追加課題で得た結果も踏まえ、 $j$  関数のサイクル積分をさらに詳しく調べることで問題解決へのアプローチを探る。具体的には、課題 2 で得られた結果と CM 値のトレースに関する過去の自身の手法を組み合わせることで、サイクル積分のトレース値の間に成り立つ非自明な等式を与えることができるか、またその関係式から何か数論的な情報を抽出することができるか考察する。一方で追加課題においては、トレース値でなく、個々のサイクル積分に関する式が得られているわけだが、実は同様の式がモジュラー結び目の絡み数に関する Duke-Imamoglu-Toth の最近の論文にも現れている。彼らの結果との関連を探ることで、サイクル積分の持つ数論的な性質を明らかにする。

他方、別のアプローチとして、双曲的フーリエ級数展開というものがある。これは Petersson によって 1940 年ごろに考察された対象であるが、現在においても多くのことはわかっていない。この別種のフーリエ級数の定数項にはサイクル積分が現れることが知られており、元々金子は  $j$  関数の双曲的フーリエ級数展開における定数項を考察していたのであった (但し彼が参照したのは Hecke の仕事である)。つまり、この級数表示に現れる係数というのは、ある種サイクル積分の一般化と見做すことができるわけである。定数項に限らずこれら係数の性質を探ることも、面白いであろう。

また近年 Demangos, Gendron, Castano らによって、Manin の実乗法プログラムに一つの解答を与えることを目的として、量子トラスというものが考察されている。また、実二次体のヒルベルト類体を構成するための予想を与えている。 $j$  関数のサイクル積分を特異モジュライの実二次類似物とするなら、彼らの仕事との関連を探ることも重要であると考えられる。

## 7. 本プログラムに採用されたことで得られたこと (1/2 ページ程度を目安に記入すること)

研究上得られたことは上記の通りではあるが、それ以外の気づきも多くあった。学部生の頃の講義で人類学者 Franz Boas の論文について学んだことがあるのだが、その論文中で彼は「未開社会」の精神に沈潜することによりはじめて、これまで自然であり、かつ当たり前であると思われた感情や思考のパターンが、文化をとおして身についた者であることが理解できるようになる、「自らの文化を対象化するときほど、文化メガネ (kulturbille) を外すのがむずかしいことはない」ということを主張していた。(太田好信・浜本満「メイキング文化人類学」参照)。当時はこれが意味するところを何一つ理解できなかったものだが、6 年越しに、このドイツ滞在という経験を通し、この重要性を再確認し、理解を深める事ができたことは、非常に嬉しいことであった。

もう一つは、所属していた研究所のシステムについてである。年間 10 本以上の (影響力のある) 論文を世に送り続ける研究所であり、いかにしてそれほどの結果を生み出しているのか、長らく気になっていたのであるが、それはまるで企業のようなものであった。研究員は皆、朝 9 時に集まり、夕方 17 時には各々帰る。昼休み以外には基本的に私語はなく、黙々と研究しているか、数学に関する議論を行っているという状況であった。土日は頭をリフレッシュするために意識的に働かず、自身や友人、家族のために時間を使う。日本で所属している大学とは大きく異なる仕組みであったため、戸惑いつつも、見習うべき箇所も多々あり、非常に良い勉強となった。

最後にこのような素晴らしい機会を提供してくださった本プログラムに大変感謝している。