

科学研究費補助金（特別推進研究）公表用資料  
〔研究進捗評価用〕

平成17年度採択分

平成20年 3月31日現在

研究課題名（和文）

精度保証付き数値計算学の確立

研究課題名（英文）

Establishment of Verified Numerical Computation

研究代表者

大石 進一 (Oishi Shin'ichi)

早稲田大学・理工学術院・教授



研究の概要：本研究では、数値計算の基礎となる線形系について、高速かつ必要な精度までの数値解を精度保証付きに求める、本来的な意味での数値計算学を確立することを目的とする。

研究分野：工学、数物系科学

科研費の分科・細目：【電気電子工学】通信・ネットワーク工学 【数学】大域解析学

キーワード：数値解析、数値計算、非線形方程式、情報数理、アルゴリズム

### 1. 背景

Von Neumann が計算機を発案した大きな目標は非線形偏微分方程式を数値計算により数学的に厳密な意味で解くことであった。皮肉なことに、数値計算の誤差は厳密に把握することが理論的及び技術的に難しいという理由で現代に至るまで数値計算とは誤差の把握を行わないものであるというのが主流の考えになっていた。

### 2. 研究の目的

本研究では、数値計算の基礎となる線形系について、高速かつ必要な精度までの数値解を精度保証付きに求める、本来的な意味での数値計算学を確立することを目的とする。

また、その応用として Von Neumann の夢であった流体系非線形偏微分方程式の境界値問題等の解の一意存在性について数値計算結果を基に証明する「計算機援用証明」法を確立し、その夢を実現する。

### 3. 研究の方法

本研究者が提案した IEEE754 倍精度浮動小数点規格の丸めの制御精度保証法と誤差無し内積計算法をベースにし、100 万次元を超える超大規模線形系の反復解法を利用した精度保証付き数値計算法を開発する。

また、非線形偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算に基づく存在検証法については「中尾の方法」が開発されており、これと大規模線形系の反復解法を利用した精度保証付き数値計算法と組み合わせ、クラスタ計算機やスーパーコンピュータ上で計算を実行することで Von Neumann の夢を実現する。

### 4. これまでの成果

#### ①大規模スパース連立一次方程式に対する精度保証法の開発

PC-クラスタ等を用いた並列計算により、 $H$  行列を係数行列とする連立一次方程式であれば 1000 万次元程度まで、また、対称正定値行列を係数行列とする連立一次方程式であれば 50 万次元程度の連立一次方程式まで、精度保証付きで数値解を生成できることを示した。さらに理論を進展させることや 500 コアまで拡張された PC-クラスタを利用することにより、一般の数百万次元のスパースな連立一次方程式も扱える見通しができた。

#### ②誤差無し内積計算法の発展と応用

浮動小数点数を要素とするベクトルの内積を演算誤差無しに高効率で計算する方法を開発した。さらに、任意に条件数が大きい行列を係数とする連立一次方程式に対する Rump 法の収束性の証明を与えた。そして、任意に条件数が大きい行列を係数とする連立一次方程式に対する精度保証法を開発した。これらは、誤差無し内積計算法を用いることにより、どんなに大きい条件数であっても、条件数に応じた計算時間で与えられた精度の解を導く適応的な数値計算アルゴリズムを構築するという新しい研究分野を開拓したと評価される。この方法は様々な線形数値代数のアルゴリズムに拡張できる基本的な方法となると評価される。

#### ③流体系非線形偏微分方程式に対する解の数値的検証法の検討

Navier-Stokes 方程式の精度保証法について、熱対流問題の分岐解の数値的検証を 3

次元の場合に拡張定式化し、分岐解の検証に成功するなど大きな進展が得られた。具体的には、2次元 Driven-Cavity 問題、空間2次元熱対流問題の解の分岐点、2次元重調和方程式、反応拡散方程式の定常解の存在と(局所)唯一性や精確な解の包み込みなどの計算機援用証明法が精度保証付き数値計算で構築できることが示され、精度保証付き数値計算の有効性を示すことができたと評価される。

#### ④カオス系の計算機援用証明法の検討

常微分方程式の精度保証法について中尾の方法に基づく手法を確立するなどの大きな進展があった。また、アフラインアリスティックによりラッピングエフェクトを効率よく低減する方法を確立した。これにより、ポアンカレマップを構成するための初期値問題の長時間包み込み法を確立した。

### 5. 今後の計画

#### ① 超大規模スパース線形系の精度保証付き数値計算法の確立

超大規模連立一次方程式の精度保証方式をさらに発展させ、非対称な大規模行列を係数に持つ場合の精度保証法について直接解法(ダイレクトスパース系)を用いる場合と反復解法を用いる場合に大別してそれぞれ検討する。

#### ②誤差無し内積計算法の発展と応用

浮動小数点数を要素とするベクトルの内積計算法を引き続き発展させ、条件数が大きい数値線形代数の問題に対する精度保証付き数値計算アルゴリズムを導出する。

#### ③ 非線形系の精度保証方式の確立

高速高精度内積計算方式を利用した効率的なアルゴリズムをさらに発展させ、非線形系の精度保証法に適用する。

#### ④非線形偏微分方程式の境界値問題の解の精度保証付き数値計算による構成

Navier-Stokes 方程式の解に対する数値検証、特に高レイノルズ領域について継続して検討する。また、Maxwell 方程式など(の散乱問題)の解の精度保証法も構築し、精度保証付き数値計算の有効性を効果的に示していく。

#### ⑤ カオス系の計算機援用証明法の検討

常微分方程式の精度保証法の研究を進め初期値問題の長時間包み込み法とその応用の研究として、力学系の計算機援用解析への応用のための基礎を確立する。

6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)  
(研究代表者は太字、研究分担者には下線)

[1] T. Ogita, **S. Oishi**: Tight Enclosures of Solutions of Linear Systems, International Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag, to

appear.

[2] N. Yamanaka, T. Ogita, S. M. Rump, **S. Oishi**: A Parallel Algorithm for Accurate Dot Product, Parallel Computing, to appear.

[3] S. M. Rump, T. Ogita, **S. Oishi**: Accurate Floating-Point Summation Part I: Faithful Rounding, SIAM Journal on Scientific Computing, accepted for publication (2008).

[4] M.T. Nakao and K. Hashimoto: On guaranteed error bounds of finite element approximations for non-coercive elliptic problems and its applications, to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics(2008).

[5] K. Ozaki, T. Ogita, S. Miyajima, **S. Oishi**, S. M. Rump: A Method of Obtaining Verified Solutions for Linear Systems Suited for Java, J. Computational and Applied Mathematics, 199:2 (2007), 337-344.

[6] **S. Oishi**, K. Tanabe, T. Ogita, S. M. Rump: Convergence of Rump's Method for Inverting Arbitrarily Ill-conditioned Matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics, 205:1 (2007), 533-544.

[7] K. Nagatou, K. Hashimoto and M.T. Nakao: Numerical verification of stationary solutions for Navier-Stokes problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 199 (2007), 424-431.

[8] T. Minamoto and M.T. Nakao: Numerical method for verifying the existence and local uniqueness of a double turning point for a radially symmetric solution of the perturbed Gelfand equation, Journal of Computational and Applied Mathematics 202 (2007), 177-185.

[9] 尾崎 克久, 荻田 武史, S. M. Rump, **大石 進一**: 点と平面との位置関係を判定する高速かつロバストなアルゴリズム, 日本応用数学会論文誌 16:4 (2006), 553-562.

[10] 太田 貴久, 荻田 武史, S. M. Rump, **大石 進一**: 悪条件連立一次方程式の精度保証付き数値計算法, 日本応用数学会論文誌, 15:3 (2005), 269-287. 【日本応用数学会 論文賞 受賞】

[11] T. Ogita, S. M. Rump, **S. Oishi**: Accurate Sum and Dot Product, SIAM Journal on Scientific Computing, 26:6 (2005), 1955-1988.