

志村多様体を核とした数論幾何学，ガロア表現，保型表現 の総合的研究

Comprehensive studies on Shimura varieties, arithmetic geometry, Galois representations, and automorphic representations

伊藤 哲史 (ITO TETSUSHI)

京都大学・大学院理学研究科・准教授



研究の概要

本研究課題では，志村多様体を核として，研究代表者を中心に世界的に活発な研究を行っている外国人研究者を含む若手研究者のグループによる総合的研究を行い，数論幾何学の諸理論やガロア表現，保型表現などに対する新しい知見を得ることを目的とする．旧来の発想にとらわれない若手研究者を中心として，既成の分野の枠にとらわれない活発な研究活動を行う．

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学，志村多様体，ガロア表現，保型表現

1. 研究開始当初の背景

数学において，中学生や高校生にも理解できるような素朴な問題が，高度な道具を使うことで初めて証明されることがよくある．ワイルズが350年以上に渡って未解決だったフェルマーの大定理『 n を3以上の整数とすると， $x^n + y^n = z^n$ をみたす自然数は存在しない』を解決したことは記憶に新しい．ワイルズによる証明は，モジュラー曲線，ガロア表現，保型表現といった数論幾何学の最先端の道具を駆使する非常に高度なものであった．素朴な方程式の背後に，深遠な大理論が隠されていたのである．

近年，志村多様体の研究が，ますます活発になってきている．志村多様体とはモジュラー曲線を一般化した代数多様体（方程式で定義された図形）である．従来は別々の興味の対象として，別々の研究グループによって，別々の視点から研究されることが多かった数論幾何学の諸理論やガロア表現，保型表現といった対象が，最近では，志村多様体を舞台として統一的な視点から深く研究されるようになってきた．そして，個々の対象が有機的につながりあい，多くの重要な応用が得られるようになってきた．

2. 研究の目的

こうした研究状況を踏まえ，本研究課題では，志村多様体を核として，研究代表者を中心に世界的に活発な研究を行っている外国人研究者を含む若手研究者のグループによ

る総合的研究を行い，数論幾何学の諸理論やガロア表現，保型表現などに対する新しい知見を得ることである．個々の分野の個々の問題に取り組むことももちろん大切であるが，それ以上に，旧来の発想にとらわれない若手研究者を中心として，既成の分野の枠にとらわれない活発な研究活動を行い，今までに無い新しい着眼点で新しい理論を構築し，新しい応用を得ることを目指すことが重要である．

3. 研究の方法

上記の目的を達成するための具体的な研究の方法は次の通りである．研究代表者のこれまでの研究成果を踏まえて，志村多様体の p 進一意化理論とハッセ不変量の一般化に関する研究を行う．また，研究をより発展・進展させるために，ラボポート-ジंक空間，志村多様体の p 進一意化理論， p 進周期写像，岩堀ヘッケ環の表現論， p 進ラングランズ対応などに関する研究を行い，また，それらの間の相互関係に関する総合的研究を行う．志村多様体の関連分野において世界的に活発な研究を行っている若手外国人研究者を招聘し，研究打ち合わせやセミナーを行う．志村多様体の数論幾何学やその関連分野に関して，国内外から数名程度の若手研究者を招聘し，大学院生を含む若手研究者を対象とした最先端のトピックに関する研究集会を行う．必要に応じて，最先端のトピックに関する発展的な講義を行い，研究代表者，参加

者を含めて活発な議論を行い、研究をさらに進展させる。また、必要に応じて、関連する他分野の研究者とも積極的に情報交換・議論を行い、既成の分野の枠にとらわれない総合的研究を推進する。

4. これまでの成果

本研究課題の研究代表者は、平成 20 年度～平成 22 年度にかけて、志村多様体の研究、特に正標数のアーベル曲面の幾何学を用いた 3 次元ジークル多様体のエタールコホモロジーの研究や、4 次シンプレクティック群 $GSp(4)$ のラポポート-ジンク空間のエタールコホモロジーに現れる超尖点表現の研究において成果を上げることができた。これらの研究は現在も順調に進展中であり、新しい成果も得られつつある。これと平行して、さらに研究を進めるために、2008 年 11 月に京都大学において国際研究集会「Workshop on Shimura Varieties, Automorphic Representations and Related Topics」を(加藤和也氏(京都大学)と共同)、2009 年 2 月に愛媛大学において国際研究集会「愛媛整数論集会」を(谷口隆氏(神戸大学)、平野幹氏(愛媛大学)と共同)、2009 年 4 月に京都大学において「岩澤理論ミニ勉強会」を、2009 年 7 月に宮城県気仙沼市大島において国際研究集会「p-adic Automorphic Forms and Arithmetic Geometry」を(千田雅隆氏(京都大学)と共同)、2009 年 11 月に石川県金沢市において国際研究集会「金沢数論幾何集会」を、2010 年 4 月に京都大学において「岩澤理論ミニ勉強会」を、2010 年 7 月に京都大学においてミニ研究集会「数論幾何とその周辺」を(玉川安騎男氏(京大数理研)と共同)、2010 年 7 月に岡山県倉敷市において「GL(n)の保型表現論 夏の学校」を、2010 年 10 月に京都府美山町において国際研究集会「L 関数の特殊値と数論幾何」を(千田雅隆氏と共同)、2010 年 11 月に大分県別府市において「別府数論幾何集会」を主催した。これらの研究集会には、志村多様体・ガロア表現・保型表現の分野において世界的に活発な研究を行っている国内外の若手研究者を多数招聘した。これにより、若手研究者同士の学術的交流を推進し、研究を進展させることができた。

5. 今後の計画

これまでの研究に引き続き、志村多様体の数論幾何学およびそれに関連した幾何学、ガロア表現、保型表現の研究を行い、研究をさらに進展させる予定である。また、特に優秀な若手研究者(外国人研究者を含む)を中心とした研究集会・勉強会を主催し、参加者同士の学術的交流を推進するとともに、関連する他分野の研究者とも積極的な情報交換・議論を行うことで、既成の分野の枠にとらわれない総合的研究をさらに推進する予定であ

る。

6. これまでの発表論文等(受賞等も含む) [雑誌論文](代表的なもの)

- ①伊藤哲史, 『非可換類体論の現状, ゼータ関数の解析接続法』, 数理科学 2011 年 1 月号, 40-45 ページ, 2011 年.
- ②伊藤哲史, 『直角三角形の不思議な世界』, 大学への数学 2011 年 1 月号, 64-67 ページ, 2011 年.
- ③伊藤哲史, 『合同ゼータのリーマン予想とその発展・影響』, 数学セミナー 2009 年 11 月号, 日本評論社, 18-23 ページ, 2009 年.
- ④伊藤哲史, 『有限体上の楕円曲線の有理点ハッセの定理』, 「この定理が美しい」, 数学書房, 20-29 ページ, 2009 年.
- ⑤伊藤哲史, 『佐藤-テイト予想の証明の方針』, 数学のたのしみ 2008 最終号, 日本評論社, 118-132 ページ, 2008 年.

[学会発表](代表的なもの)

- ①伊藤哲史, 『On the l-adic cohomology of the Rapoport-Zink space for $GSp(4)$ 』, 国際研究集会「The Second PANT (PanAsian Number Theory) Conference」, 2010 年 9 月 16 日, 京都大学数理解析研究所.
- ②伊藤哲史, 『On the order of vanishing of automorphic L-functions for $GL(2)$ over global fields at the center of functional equation』, 国際研究集会「Workshop on arithmetic geometry and related topics」, 2010 年 7 月 12 日, National Taiwan University, 台湾.
- ③伊藤哲史, 『Logarithmic geometry and Deligne-Rapoport's integral models』, 国際研究集会「Workshop on Automorphic Representations, Geometry, and Arithmetic」, 2009 年 7 月 23 日, National Taiwan University, 台湾.
- ④伊藤哲史, 『On the cohomology of supersingular loci of Siegel threefolds』, 国際研究集会「p-adic Hodge theory, p-adic modular forms and applications」, 2009 年 7 月 14 日, Centre de Conférences de la Station de Biologie, Marine, Roscoff, フランス.
- ⑤伊藤哲史, 『On the l-adic cohomology of Siegel threefolds in characteristic p』, 国際研究集会「PANT 2009 - Pohang, Pan Asian Number Theory Conference」, 2009 年 1 月 10 日, POSTECH(浦項工科大学), 韓国.
- ⑥伊藤哲史, 『On the l-adic cohomology of Siegel threefolds in characteristic p』, 研究集会「代数的整数論とその周辺」, 2008 年 12 月 9 日, 京都大学数理解析研究所.