

多様体の微分同相群

東京大学 大学院数理科学研究科 教授
坪井 俊



研究の背景

幾何学の対象は、平面、空間内の図形の研究でしたが、19世紀になると多変数の関数も研究され、高い次元の空間を考えるようになりました。多様体の概念は20世紀前半に確立し、現代数学の研究の基本的な対象となっています。現代の立場では、集合の上に様々な構造を考えることが、空間の形を考えることであり、微分積分という概念が定式化できる多様体は、通常のユークリッド空間がつながり合っ構成されます。このつながり方が大域的な空間の形を決定していますが、それが同じ形になっているか違う形になっているかを判定することが多様体論の基本的な問題です。ここで重要なことは、同じ形であることには数学的な定義が必要と言うことです。また、違う形であることを示すためには、同じ形ならば同じ値を与える量(不変量)を定義して、それが異なることを計算で示すことになります。さて、2つの多様体が同じ形であることは、一方から他方への微分同相写像という対応が存在することとして定義されます。違うことを示すためには、不変量が必要ですが、2次元の有界な曲面には、向き付け、種数という2つの不変量があり、この値が違えば違う形です。一方、2つの値が同じならば同じ形ということは、20世紀の初めまでに確立された定理です。近年、証明されたポアンカレ予想が重要だったのも、基本群という不変量が、最も簡単な単位群であれば、3次元球面と同じ形ということを主張しているからです。

研究の成果

1つの多様体の自分自身への微分同相の全体が、私の研究対象の微分同相群です。この群は同じかどうかの判定の基本的なずれを記述しているものですが、さらに、多様体上の様々な構造の同一性を記述するために極めて重要なものです。微分同相群はその恒等写像成分と写像類群に分解され、その両方を研究することにより多様体自身の深い理解が得られます。およそ30年前にHerman, Mather, Thurston が微分同相群の恒等写像成分は完全である、すなわち、その元は交換子の積で書かれることを示し、それを葉層構造(図1)の分類に応用しました。群における交換子とは、 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ の形の元のことです。実際の葉層構造の研究には、交換子の個数を決定することが必要です(図2)が、2次元、4次元以外のコンパクト多様体に対し、微分同

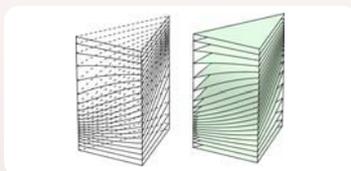


図1 葉層構造

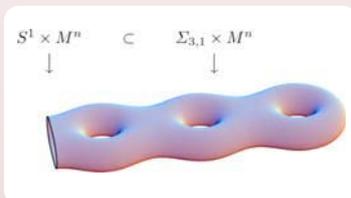


図2 3個の交換子の積は種数3の曲面上の葉層の境界と対応する

相群の恒等写像成分の元は、多様体により定まる一定の個数以下の交換子の積に書かれるという研究成果を得ました。また、実解析的多様体の実解析的微分同相群については30年前にHermanによりトラスだけに示されていた恒等写像成分の完全性を自由な円周作用または特殊半自由円周作用を持つ実解析的多様体に対して示しました。このためには1の分割と呼ばれる手法の実解析的な対応物(図3)、特異的実解析的逆写像定理を示す必要があり(図4)、それ自身非常に興味深いものです。

今後の展望

微分同相群は様々な部分群をもち、それぞれが多様体上の構造に関係しています。今後の重要な研究対象は、体積要素、接触構造あるいはシンプレクティック構造を保つ微分同相の群です。これらの群の、位相、不変量、交換子群の研究などが非常に面白いものになります。特に、交換子で書かれる場合の交換子の個数の研究は、様々な群において重要な意味を持っています。これらの研究においては、これまででもそうでしたが、国内外の研究者との討論により、新しい研究の方向を見定めていくことが非常に重要です。

関連する科研費

- 平成16-19年度 基盤研究(A)「多様体の無限変換群の総合的研究」
- 平成18-20年度 萌芽研究「実解析的微分同相群の研究」
- 平成20-24年度 基盤研究(A)「多様体の微分同相群の研究」
- 平成21-23年度 挑戦的萌芽研究「無限単純群の幾何的研究」

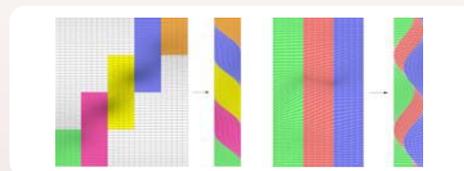


図3 1の分割を使うfragmentationと実解析的なregimentation

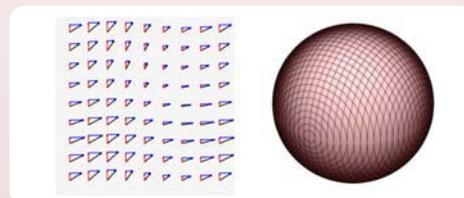


図4 微分同相の分解のスキームを球面上の網目に対して用いるためには特異的実解析的逆写像定理が必要である