

無限可積分系の幾何学とモジュライ理論の新展開
Geometry of integrable systems with infinite degrees
of freedom and new development of moduli theory



上野 健爾 (Kenji UENO)
京都大学・大学院理学研究科・教授

研究の概要

モジュライ空間を数論幾何学的、 p 進幾何学的、代数幾何学的観点から研究し、無限可積分系の幾何学との関係を究明し、他分野への理論の応用を行った。

研究分野／科研費の分科・細目／キーワード

数物系科学／数学・代数学／代数幾何学 無限可積分系 数論幾何学 モジュライ空間

1. 研究開始当初の背景・動機

理論物理学の影響により誕生した無限自由度の可積分系の理論は、異なる数学の分野に、それまで知られていなかった思いもかけない深い関係があることを明らかにした。その関係の中心の一つとしてモジュライ空間がある。モジュライ空間は数学的に興味深い性質を持っており、代数幾何学的、数論幾何学的に興味深い対象であるだけでなく、無限可積分系と密接に関係している。このような関係が成立する数学的な理由を見いだすことが研究の背景にある。

2. 研究の目的

無限自由度の可積分系の理論の持つ幾何学的性質とモジュライ空間の幾何学との関係を相互に参照しながら、モジュライ空間の性質を数論幾何学的、代数幾何学的、 p 進幾何学的観点から研究し、無限可積分系とモジュライ空間の深く美しい関係の解明を目指す。

3. 研究の方法

主として、アイディアの交換によって研究を行う。また、発展著しい数式処理ソフトを使うことによって、複雑な計算を行う。

4. 研究の主な成果

1. 上野のグループは可積分系典型例と考えられる複素単純リー代数をゲージ対称性を持つ共形場理論 (WSWNモデル) とアーベル的共形場理論 (これらは複素解析的、代数幾何学的に定義される) をもとに位相的場の理論を構成し、これまでと全く異なる方法によって3次元多様体の不変量を構成した。

2. 上野のグループは共形場理論で重要な役割をする WSWN モデルの S 行列は種数1の曲線を使って定義されるが、種数0のデータから決まることを示し、位相的場の理論でも同様の事実が成り立つことを示した。

3. 上野のグループは共形場理論の応用として4点付き球面の写像類群の Nielsen-Thurston 分類を考察し、この分類が正整数 $n \geq 2$ を固定したときに量子 $SU(n)$ 表現から決定できることを示した。

4. 加藤文元のグループは p 進幾何学の一般化である剛幾何学 (rigid geometry) の建設を推進した。剛幾何学によって多くのモジュライ空間の数論的なコンパクト化 (bad primes が可逆であるような係数環上でのコンパクト化) が可能となり、また、フロベニウス写像を一種の力学系として取り扱うことが可能になる。

[4. 研究の主な成果 (続き)]

5. 加藤文元のグループは p 進幾何学の典型的な対象である Mumford 曲線の自己同型の評価や、微分方程式との関連を見いだした。
6. 川口周一のグループは射影空間の自己準同型写像を代数的な力学系として考察し、数論幾何学的対象と力学系としての対象との関係を見だし、力学系としての考察がモジュライ空間の幾何学的研究に有効であることを示した。
7. 望月新一は函数体や代数体の被覆や因子の概念の圏論的な一般化と捉えることができる Frobenioids の理論の構築、エタール・テータ函数の理論など、従来とは異なる観点から圏論的な議論を展開し、モジュライ理論を全く新しい観点から考察できる基礎を建設中である。
8. 高崎金久のグループは安定ベクトル束のモジュライと関係する Tyurin パラメータをい、可換微分作用素環と KP 階層による時間発展を組み合わせることによって、代数曲線の種数が高い場合にも古典的なソリトン理論の対応物が構成できることを示した。
9. 高崎金久のグループは、有理函数の対のなす空間の開集合に可積分系の構造を導入できることを示した Atiyah-Hitchin の理論を種数 1 以上の代数曲線の場合に拡張できることを示した。
10. 山田泰彦のグループは射影空間の点群のなすコンフィグレーション空間とその空間上の楕円函数を係数に持つ Cremona 変換を考えることによって、楕円型差分パルヴェ方程式の理論の高次元への一般化が可能であることを示した。
11. 山田泰彦のグループは 3 次曲線束の幾何学から離散パルヴェ方程式やパルヴェ方程式そのものを構成できることを示し、従来の有理曲面を使った構成法とは異なる手法を示した。
12. 清水勇二は正則切断を持つ有理楕円曲面 $X \rightarrow B$ から三つ組 (X, S, Y) , S は切断の像、 Y は一般ファイバー、のモジュライ空間を考察し、E 型の Seiberg-Witten 可積分系が構成できることを示した。

5. 得られた成果の世界・日本における位置づけとインパクト

複素解析的な手法を使って位相不変量を構成したことは、世界の位相不変量に研究者に大きなインパクトを与えた。

また、上記の成果の多くは世界をリードする研究である。

6. 主な発表論文

(研究代表者は太字、研究分担者には下線)

J.E. Andersen, & K. Ueno: Geometric construction of modular functors from conformal field theory, Journal of Knot theory and its Ramifications.(受理済)

E. Andersen, G. Masbaum & K. Ueno: Topological quantum field theory and the Nielsen-Thurston classification of $M(0,4)$, math. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.(受理済)

J.E. Andersen, & K. Ueno: Abelian Conformal Field theories and Determinant Bundles, International Journal of Mathematics. (受理済)

S. Kawaguchi & J.-H. Silverman: Dynamics of projective morphisms having identical canonical heights. Proc. London Math. Soc. (3). (受理済)

Yuji Shimizu: Seiberg-Witten Integrable Systems and Periods of Rational Elliptic Surfaces, Toshitake Kohno and Masanori Morishita (Eds.) " Primes and Knots, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, Vol. 416 (2006), pp. 237--247.

T. Yoshida: Absolute CM-periods--complex and p -adic, in Arithmetic geometry and number theory(ed.L. Weng and I. Nakamura), 65-101,(2006), World Scientific..

Fumiharu Kato: Non-archimedean orbifolds covered by Mumford curves, Journal of Alg. Geom.,14(2005), 1--34.

S. Mochizuki: The Geometry of Anabelioids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 40 (2004),819-881.

K. Takasaki: Tyurin parameters and elliptic analogue of nonlinear Schrodinger hierarchy, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 11(2004), 91--131.