

## 【基盤研究(S)】

理工系 (数物系科学)



### 研究課題名 格子、保型形式とモジュライ空間の総合的研究

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

こんどう しげゆき  
金銅 誠之

研究課題番号: 15H05738 研究者番号: 50186847

研究分野: 数物系科学、数学、代数学

キーワード: 代数幾何

#### 【研究の背景・目的】

いくつかの方程式の共通零点の集まりとして定まる図形 (代数多様体) の構造や対称性および図形のある種の分類 (モジュライ空間) を行うことが代数幾何の大きな問題である。代数多様体の中で最も美しいものの一つに楕円曲線と呼ばれるものがある。楕円曲線は 19 世紀に見いだされた現代数学の雛形の一つと言え、代数・幾何・解析が見事に調和した世界を形作っているが、暗号理論への思わぬ応用など、現在でも重要な研究対象である。楕円曲線の 2 次元版として K3 曲面と呼ばれる代数多様体が 19 世紀に発見された。その名は、3 人の数学者 Kummer, Kähler, 小平邦彦の頭文字 K および、その神秘性から当時は未踏峰であったカラコルムの山名 K2 に由来する。K3 曲面はミラー対称性予想を通して数理物理学でも興味を持たれており、数年前には K3 曲面の楕円種数と散在型有限単純群の一つマシュー群との関係を示唆する神秘的な現象 “マシュー・ムーンシャイン” が発見された。楕円曲線の周期理論の類似も成り立ち、1990 年代に Borchers によって見いだされた新しい保型形式論 (ある種の不変性を持った関数論) が K3 曲面のモジュライ空間の研究にも有用であることも徐々に分かってきた。さらに K3 曲面と関係の深いエンリケス曲面の自己同型とモジュライ空間の研究も任意標数で関心を持たれている。

本研究課題の目的は、K3 曲面、エンリケス曲面、高次元版のカラビ・ヤウ多様体などの対称性 (自己同型群) やモジュライ空間を、上で述べた代数幾何にとどまらない広い視点から研究することである。

#### 【研究の方法】

上に述べた K3 曲面、エンリケス曲面、散在型有限単純群論、Borchers の保型形式論は、格子理論 (座標平面の整数点の集合の一般化) を通じて結びついている。この観点に立ち研究を進めるのが大きな特色である。K3 曲面の位相不変量であるオイラー数は 24 であるが、一方、24 次元の格子はリーチ格子と呼ばれる格子の存在など、特別に良いクラスをなしており、この点に着目して研究を進める。また K3 曲面やエンリケス曲面の周期領域は IV 型有界対称領域と呼ばれるものであり、Borchers の保型形式論はこの領域上展開される理論である。楕円曲線の場合、古典的な保型関数・保型形式がモジュライ空間の研究に有効であったが、K3 曲面・エンリケス曲面の場

合に Borchers の保型形式論を用いてモジュライ空間の幾何学を研究する。

数学においては研究者の研究交流が最も大切である。研究者の派遣・招聘や国際研究集会の開催を行い広い視点からの研究を進めていく予定である。

#### 【期待される成果と意義】

これまで代数曲線のモジュライの研究はそのヤビ多様体を通して、アーベル多様体の観点から研究されてきた。本研究においては、種数が小さい曲線に限るが、そのモジュライ空間の研究をアーベル多様体の代わりに K3 曲面とその自己同型の組の周期を用いる点が新しい発想である。またアーベル多様体の場合、テータ関数を用いた研究は古い歴史があるが、Borchers の IV 型領域上の保型形式を用いたモジュライ空間の研究は新しい理論の展開を促す可能性がある。K3 曲面のオイラー数が 24 であることを起点として、有限単純群論や保型形式論を取り込んだ研究を進めて行くことで、代数幾何学・数理物理学・有限単純群などが、K3 曲面を要とした新しい理論の雛形に発展することが期待される。

#### 【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- Shigeyuki Kondo, Ichiro Shimada, On a certain duality of Neron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces, Algebraic Geometry 1 (2014), 311—333.
- Igor Dolgachev, Shigeyuki Kondo, The rationality of the moduli spaces of Coble surfaces and of nodal Enriques surfaces, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya 77 (2013), 77—92.

#### 【研究期間と研究経費】

平成 27 年度—31 年度 68,400 千円

#### 【ホームページ等】

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kondo/>