

## 【基盤研究(S)】

理工系(数物系科学)



### 研究課題名 統計と計算を戦略とする可換代数と凸多面体論の 現代的潮流の誕生

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

ひび たかゆき  
日比 孝之

研究課題番号: 26220701 研究者番号: 80181113

研究分野: 数学

キーワード: グレブナー基底、二項式イデアル、凸多面体

#### 【研究の背景・目的】

科学技術振興機構の戦略的創造研究推進事業の数学領域の研究課題「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」(通称、日比プロジェクト)を踏襲し、本基盤研究は、若手研究者育成事業を継続するとともに、日比プロジェクトの代数、統計、計算の盤石な研究組織を堅持し、日比プロジェクトにおける純粋数学の独創的な着想を深遠な理論に昇華させる。

第1に、可換代数と組合せ論の連携から、40余年前、単項式イデアルの可換代数が誕生したが、その歴史的経緯を踏まえ、統計数学、特に、統計モデルと実験計画から、二項式イデアルの秘宝を発掘し、二項式イデアルの可換代数を展開する。

第2に、0次元パフィアン系の計算と言う視点から、凸多面体論、A超幾何系と統計分布論の奏でる三重奏(いわゆる Gelfand の思想)を展開し、凸多面体論から、統計分布の革新的なモデルを提唱する。

#### 【研究の方法】

(戦略 a) 可換代数における *determinantal ideals* の研究の歴史は古く、不変式論、表現論、組合せ論などとの関連を持ちながら発展してきた。昨今、分割表の代数統計の展開と相俟って、幾つかの二次小行列式から成る任意の集合が生成する二項式イデアルの研究が徐々に活性化されている。主な問題は、そのようなイデアルが、素イデアルであるか否か、根基イデアルであるか否か、素イデアルであれば、その剰余環であるトーリック環は、正規環(あるいは Cohen-Macaulay 環)であるか否か、二次二項式から成るグレブナー基底を持つか否か、等である。

(戦略 b) 実験計画のデータ検定に必須なマルコフ基底は、実験計画に付随するトーリックイデアルの生成系に対応する。研究代表者らは、レギュラーな2水準一部実施計画と切断イデアルの相互関係の探究から、1/2 実施計画、1/4 実施計画の主効果モデルが二次のマルコフ基底を持つことを証明した。その成果を踏まえ、一般の2水準一部実施計画のトーリックイデアルの代数的理論を構築し、更に、多水準一部実施計画のマルコフ基底の計算の可能性を探る。

(戦略 c) 順序凸多面体は、有限分配束のトーリックイデアルを定義する著名な凸多面体である。順序凸多面体に付随するA超幾何系には、そのパフィアン系の階数が多項式的に増加する無限系列が存在する。そのような無限系列を導く凸多面体の斬新な類を探究するとともに、凸多面体論の観点から、計算可能なA超幾何分布のモデルを提唱し、統計モデ

ルの豊富なデータベースを構築する。

(戦略 d) Segre-Veronese 配置の一般化である入れ子配置の理論は、統計学の具体的なモデルから代数学へのフィードバックとしての着想である。入れ子配置、中心対称配置などに付随する凸多面体とトーリックイデアルの具象的研究を展開し、その統計学的な解釈を議論する。

#### 【期待される成果と意義】

本基盤研究は、黎明期である、二項式イデアルの可換代数の劇的な展開を齎し、可換代数の新天地を開拓するとともに、代数的側面から計算代数統計の発展に貢献する。加えて、統計と計算を礎とする、従来とは全く異なる枠組から、伝統的な凸多面体論を大胆に再編成し、凸多面体の代数的組合せ論の研究に斬新な潮流を誘う。

日比プロジェクトと本基盤研究の10年を越える継続的な研究から、代数、統計、計算の深遠なる連携が現代数学に深く浸透し、その潮流は、次世代の永続的な展開へと踏襲される。

#### 【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- T. Hibi, Ed., "Gröbner Bases: Statistics and Software Systems," Springer, 2013.
- S. Aoki, T. Hibi and H. Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for regular two-level fractional factorial designs and cut ideals, *J. Statist. Plann. Infer.* **143** (2013), 1791--1806.
- V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and F. Mohammadi, Determinantal facet ideals, *Michigan Math. J.* **62** (2013), 39--57.
- J. Herzog and T. Hibi, "Monomial Ideals," GTM 260, Springer, 2011.
- S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Gröbner bases of nested configurations, *J. Algebra* **320** (2008), 2583--2593.

#### 【研究期間と研究経費】

平成26年度-30年度  
137,700千円

#### 【ホームページ等】

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~hibi/>  
[hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp](mailto:hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp)