

特異構造が支配する非線形現象の高度形態変動解析

Advanced Analysis on Evolving Patterns in Nonlinear Phenomena Driven by Singular Structure

課題番号：26220702

儀我 美一 (GIGA YOSHIKAZU)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授



研究の概要

結晶成長のような形態や形状の変動現象を記述する非線形拡散型方程式を中心に、時間発展型偏微分方程式に対して、さまざまな数学的手法を融合し、解の存在・一意性問題と解の挙動を考察します。特に、特異構造を持つ方程式や、特異点を許す形状を許容するような新たな解概念を確立し、現象を記述しやすい数学解析の基礎の構築を目指します。

研究分野：数物系科学、数学、数学解析

キーワード：非線形現象（含 変分解析・非線形現象）

1. 研究開始当初の背景

形状の変動を数学的に解明するには、いわゆる「特異構造」がどのようにして形成されていくかを把握することが重要な鍵になります。特異構造の例として、ちぎれる液滴や、結晶表面に現れる衝突する渦、また結晶の強い異方性を反映したファセットと呼ばれる平らな面などが挙げられます。

特異構造を含む場合、接線や曲率を古典的な意味で定義できないことが多いので、偏微分方程式の古典解だけを用いるのでは不十分です。解概念の拡張が必要になります。

2. 研究の目的

本研究では、特異構造が支配する非線形性の強い拡散型方程式に対して、微分可能とは限らない解「弱解」の概念を導入し、問題の数学的適切性や、解の特性を調べ、形態の変動を解析します。方程式自体に特異点があるような特異拡散方程式、例えばクリスタリン平均曲率流方程式を研究対象とします。諸モデル間の関係を明らかにするとともに、結晶成長分野、流体力学分野等への応用を目指します。このために、最先端の粘性解析、変分解析、関数解析、漸近解析、実解析をさらに深化させます。

3. 研究の方法

個人研究と、国内外共同研究者との共同研究を主体とします。国際ワークショップ、学際的国際会議およびチュートリアルセミナーを開催し、研究者ネットワークを強化します。

開催例：

- (i) Summer School on Multiscale and Geometric Analysis（平成27年度）
- (ii) Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation（平成27年度）
- (iii) Mathematical Aspects of Surface and Interface Dynamics VI, VIII, X（平成26年度、27年度、28年度）
- (iv) Emerging Developments in Interfaces and Free Boundaries（平成28年度）

4. これまでの成果

大きく5つのテーマに分けて述べます。

①非線形非局所的拡散に特徴的な構造の解析：時間発展現象を記述する偏微分方程式の中で、その解の時間変化率が局所的な量ではなく全体の場によって決まる非局所的効果があるものが、近年注目を集めています。結晶成長現象を記述する強い異方性を持った曲率流方程式、特にその定常形が凸多角形や凸多面体になるクリスタリン平均曲率流方程式が典型例です。また、地中の汚染水の拡散現象を表す分数階時間微分方程式や、流体力学のナビエ・ストークス方程式もその例です。駆動力付クリスタリン平均曲率流方程式は、結晶成長形を記述する方程式として重要ですが、駆動力が空間的に非一様な場合の解の形状は、曲線の運動の場合もよくわかっていませんでした。それに対して、平らな面（ファセット）が分裂する様子がわかる形状変化を提唱し、それが抽象論で見つけられている一意解に他ならないことを示しま

した [文献 3]。また分数階時間微分方程式について新たに粘性解的考察を行うことにより、連続一意解の構築もできるようになりました。これは 1 階線形方程式の場合でも新しい結果です (投稿中)。さらにナビエ・ストークス方程式の線形化部分に対応する解作用素であるストークス半群について、 L^p ヘルムホルツ分解できない領域について有界関数の空間での解析性を示しました [文献 2]。この論文は Editor's choice として表彰されました。さらに L^p での解析性も示し、従来の定説を覆しました [文献 6]。

②特異構造を許す概念の定式化：クリスタライン平均曲率流方程式は特異性が強く、その解の形状の時間変化は非局所的な量で決まります。特異 2 階曲率流方程式の典型例です。曲面の場合は、適切な解概念を構築することが大きな問題で、曲線の場合の研究代表者らの結果以来 15 年以上未解決問題でした。これに対して、関数解析の極大単調作用素論を粘性解析に取り入れることにより、曲面のクリスタライン平均曲率流方程式に対して等高面法を確立しました。これにより、どんな曲面から出発してもクリスタライン平均曲率流方程式によって動く広義解が時間大域的に一意的に構成できるようになりました [文献 5]。一方、平均曲率流方程式に対しては、相が多くある場合について、特異点を許す変分解析的に得られるバリフォールド解を構成しました。多相問題について一般的な結果として最初のものでした [文献 7]。

③形態の安定性と漸近挙動の解析：平らな結晶表面の成長機構の一つである 2 次元核生成の数理モデルは、駆動力付の等高面曲率流方程式に核生成による外力項がつけられた方程式と解釈できます。水平方向への伝播と垂直方向に一定の量の結晶の種が供給されるという法則ですが、このときの結晶表面の成長速度は、方程式の解の漸近速度と捉えられます。この成長速度はハミルトン・ヤコビ方程式の場合と大きく異なることを示しました [文献 4]。これまで注目されてこなかった新しい現象の発見です。

④モデル相互の関係と近似法との確立：クリスタライン平均曲率流方程式の解の一意存在問題は②項で述べましたが、その解は実は滑らかな異方的平均曲率流の解で近似できることを示しました [文献 5]。この近似法により解が構成されています。物理的には極めて自然な結果ですが、これを数学的に厳密に示すことは自明ではありませんでした。

⑤科学技術諸分野への応用と新たな問題探索：結晶成長の一つのメカニズムである渦巻成長の成長速度について、結晶成長学における定説を改める必要があることを、変形等高面法の数値計算により示しました [文献 1]。従来の計算法では、複数の渦巻が共存し、衝突する場合の扱いは困難でしたが、この変形

等高面法により容易になりました。

5. 今後の計画

テーマ①～④に対しては、結果のさらなる拡張や精密化を行います。これらの知見をもとに、動く薄膜上の方程式の解析など、新たな方程式をも研究します。テーマ⑤については、これまで定式化した問題の数学的解決を目指します。さらに、心臓膜電位モデルなど生命系の問題にも挑戦していきます。次のようなシンポジウムを予定しております。

- a) Mathematical Aspects of Surface and Interface Dynamics 14 (2017 年 10 月 25 日～27 日)
- b) The role of metric in the theory of partial differential equations (2018 年 7 月 2 日～13 日)

6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

1. T. Ohtsuka, T.-H. R. Tsai and Y. Giga, A level set approach reflecting sheet structure with single auxiliary function for evolving spirals on crystal surfaces, *Journal of Scientific Computing* **62** (2015), 831–874.
2. K. Abe, Y. Giga, K. Schade and T. Suzuki, On the Stokes semigroup in some non-Helmholtz domains, *Arch. Math. (Basel)*, **104** (2015), 177–187.
3. Y. Giga, P. Goroka and P. Rybka, Bent rectangles as viscosity solutions over a circle, *Nonlinear Analysis* **125** (2015), 518–549.
4. Y. Giga, H. Mitake and H. V. Tran, On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms, *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), 3515–3546.
5. Y. Giga and N. Pozar, A level set crystalline mean curvature flow of surfaces, *Adv. Differential Equations* **21** (2016), 631–698.
6. M. Bolkart, Y. Giga, T.-H. Miura, T. Suzuki and Y. Tsutsui, On analyticity of the L^p -Stokes semigroup for some non-Helmholtz domains, *Math. Nachr.* (2017), Online version.
DOI: 10.1002/mana.201600016
7. L. Kim and Y. Tonegawa, On the mean curvature flow of grain boundaries, *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* **66** (2017), 43–142.

受賞

儀我美一：日本応用数学会フェロー (2014 年 11 月)

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~labgiga/>