

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料  
〔平成29年度研究進捗評価用〕

平成26年度採択分  
平成29年3月17日現在

統計と計算を戦略とする可換代数と凸多面体論の  
現代的潮流の誕生

The Birth of Modern Trends on Commutative Algebra  
and Convex Polytopes with Statistical and  
Computational Strategies

課題番号：26220701

日比 孝之 (TAKAYUKI HIBI)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授



研究の概要

実験計画のマルコフ基底と格子凸多面体の三角形分割を巡る二項式イデアルの可換代数を飛躍的に発展させるとともに、反射的凸多面体と統計分布の探究から凸多面体論の現代的な潮流を育んだ。日本数学会季期研究所「グレブナー基底の50年」と京都大学数理解析研究所のプロジェクト研究「グレブナー基底の展望」（平成28年度）を実施した。

研究分野：数学

キーワード：グレブナー基底、二項式イデアル、凸多面体、実験計画

1. 研究開始当初の背景

科学技術振興機構の戦略的創造研究推進事業（数学領域）の研究課題「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」（2008年10月～2014年3月；通称、日比プロジェクト）は、代数、統計、計算の研究者から構成される仮想研究所であり、グレブナー基底のブレークスルーを発祥させることに成功している。ポスト日比プロジェクトの本研究は、代数、統計、計算の盤石な研究組織を堅持し、日比プロジェクトから芽生えた純粋数学の独創的な着想を育み、可換代数、凸多面体、統計、計算を包括する壮大な景観を披露する。

2. 研究の目的

計算と統計の視点から二項式イデアルの可換代数を飛躍的に発展させ、可換代数の歴史的な潮流を誘う。更に、凸多面体と統計の魅惑的な相互関係（Gelfandの思想）を発掘し、凸多面体論の再編と変革を育む。

3. 研究の方法

（戦略 a）凸多面体などから二項式イデアルの秘宝を発掘し、多水準一部実施計画のマルコフ基底の計算の可能性を探究する。

（戦略 b）順序凸多面体の従来の研究の枠組を打破し、その斬新な側面を開拓する。

（戦略 c）A分布のパフィアン系の計算という視点から、凸多面体論を俯瞰する。

（戦略 d）日本数学会季期研究所「グレブナー基底の50年」（平成27年7月）を開催し、グレブナー基底を巡る、凸多面体、可換代数、統計の諸分野の融合を促進する。

4. これまでの成果

可換代数と凸多面体論の現代的潮流の誕生に焦点を絞り、平成26, 27, 28年度の主な研究成果を列挙する。

（**反射的凸多面体**）格子凸多面体の対(P,Q)の $\Gamma$ 対と $\Omega$ 対と呼ばれる概念を導入し、逆辞書式グレブナー基底の理論を武器に、反射的凸多面体の斬新な類を大量に生産するための独創的な理論を展開した（[1]）。とりわけPとQが順序凸多面体、鎖凸多面体、有限グラフのstable多面体などのときを探究し、或る条件の下、それらの $\Gamma$ 対と $\Omega$ 対が正規な反射的凸多面体になることを示した。その系の一つは、次元dの順序凸多面体と鎖凸多面体は、必ず次元d+1の正規な反射的凸多面体のfacetとなることである。更に、stable多面体の $\Gamma$ 対と $\Omega$ 対の反射性と正規性から、有限グラフのパーフェクト性を特徴付けた。

（**実験計画と凸多面体**）Box-Behnken計画の主効果モデルのマルコフ基底はD型根系の配置行列に対応する。D型根系に付随する格子凸多面体の単模三角形分割はM. Beckらにより具体的に構成されている。その単模三角形分割が正則であるとの作業仮説の下、単模三角形分割の詳細な分析からD型根系の配置行列のトーリックイデアルの或る単項式順序に関するグレブナー基底を、素手計算を駆使し、発掘することに成功した（[2]）。更に、そのマルコフ基底を使い、実際のデータをマルコフ連鎖モンテカルロ法により検定した。歴史上、3水準の一部実施計画をマルコフ連鎖モンテカルロ法により検定した仕事は存在せず、論文[2]の統計に関する

結果はきわめて独創的である。しかも、格子凸多面体の単模三角形分割から逆解きの着想によりグレブナー基底を発掘できたことは、グレブナー基底の今後の代数計算の展開への扉を開く開拓的な仕事である。

(A超幾何系と凸多面体) A超幾何関数はホロノミック系の解である。従って、原理的には、そのパフィアン系を表示することは可能である。パラメータがジェネリックなときパフィアン系の基底を表示するための計算代数的なテクニックを開発した。更に、2本の鎖から成る有限半順序集合の順序凸多面体に付随するA超幾何系に関し、組合せ論と可換代数の技巧を駆使し、きわめて具体的に基底を表示することに成功した ([3])。しかも、有限分配束の花束の概念を導入し、その結果を著しく一般化している。他方、順序凸多面体に付随するA超幾何系の系列で、その階数が順序凸多面体の次元に関する多項式で押さえられるものを発見した。順序凸多面体に関する結果は、ほとんどそのまま鎖凸多面体に焼き直すことが可能である ([4])。その結果、凸多面体論からホロノミック勾配法が適用可能な統計分布の、斬新な、豊富な類を提唱できる舞台が設定された。

(二項式イデアル) 有限半順序集合  $P$  の順序凸多面体のトーリック環  $K[P]$  (但し、 $K$  は体) の定義イデアル  $J_P$  は可換代数の枠組における著名な二項式イデアルである。これらは1987年、研究代表者が導入し  $J_P$  は二次グレブナー基底を持ち、 $K[P]$  は正規環であることを示した。その後、 $K[P]$  と  $J_P$  は多様な一般化が提唱されたが、論文 [5] のトーリック環とトーリックイデアルは、もっとも一般化されたものである。有限半順序集合  $P$  から  $Q$  への順序を保つ写像に単項式を対応させ、トーリック環  $K[P, Q]$  を定義すると、定義イデアル  $J_{P, Q}$  は、 $J_P$  の一般化となる二項式イデアルである。論文 [5] では、任意の  $P$  と  $Q$  で  $K[P, Q]$  は正規環になる、という予想に挑戦し、部分的な結果を得た。一般に、 $J_{P, Q}$  は二次二項式で生成されるとは限らないが、 $P$  と  $Q$  が或る条件を満たすとき、二次グレブナー基底を持つことを示した。論文 [5] は、今後のトーリック環と二項式イデアルの研究の展開に強い影響を及ぼすことが必至である。

有限半順序集合の多重鎖に付随するトーリックイデアルを探究し、多重鎖の長さの設定に依存せず、二次二項式から成るグレブナー基底が存在することと、その有限半順序集合の比較可能グラフが弦グラフであることの同値性を証明した ([6])。弦グラフとなる比較可能グラフの代数的な特徴付けが得られたことは、きわめて独創的である。

なお、二項式イデアルに関する単行本 [7] は、本基盤研究 (S) の研究成果を集約したものであり、今後の可換代数の研究の方向性を示唆する文献である。

## 5. 今後の計画

(反射的凸多面体) 空な反射的格子単体の分類理論の礎を築くとともに、正規な反射的凸多面体の facet となる格子凸多面体の斬新な類を発掘する。今後、ライプチヒ、ベルリンの凸多面体の幾何の研究グループとの連携を強化させ、国際共同研究を企画する。

(実験計画) Box-Behnken 計画の二次の相互作用を考慮した二次モデルの当てはまりをマルコフ連鎖モンテカルロ法による検定を実施するためのマルコフ基底の発掘に挑戦する。一般の状況で、そのようなマルコフ基底が発掘されたならば、実験計画に影響を及ぼすことは必至で、波及効果は絶大である。

(A超幾何系) 凸多面体論からホロノミック勾配法が適用可能な統計分布の豊富な類を提唱することができる舞台が設定されたことを踏まえ、応用数学への参入、すなわち、現実社会に有益となる可能性を秘めた、計算可能な統計分布モデルの提唱に挑戦する。

(二項式イデアル) トーリック環  $K[P, Q]$  が正規である、という懸案の予想の肯定的な解決に挑戦する。すなわち、二項式イデアル  $J_{P, Q}$  のスクエアフリーなイニシャルイデアルの存在を証明する。更に、素イデアルとなるポリオミノイデアルの分類作業を継続する。

## 6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)

- [1] T. Hibi, H. Ohsugi *et al.*, Centrally symmetric configurations of order polytopes, *J. Alg.* **443** (2015), 469--478.
- [2] S. Aoki, T. Hibi and H. Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the Box-Behnken designs and centrally symmetric configurations, *J. Stat. Theory Pract.* **10** (2016), 59--72.
- [3] T. Hibi, K. Nishiyama and N. Takayama, Pfaffian systems of A-hypergeometric Equations I: bases of twisted cohomology groups, *Adv. Math.* **306** (2017), 303--327.
- [4] T. Hibi and N. Li, Unimodular equivalence of order and chain polytopes, *Math. Scand.* **118** (2016), 5--12.
- [5] M. Bigdeli, J. Herzog, T. Hibi, A. A. Qureshi and A. Shikama, Isotonic Algebras, *Nagoya Math. J.*, to appear.
- [6] H. Ohsugi and T. Hibi, A Gröbner basis characterization for chordal comparability graphs, *Europ. J. Combin.* **59** (2017), 122--128.
- [7] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, Binomial Ideals, *Prog. in Math.*, Birkhäuser, Boston, to appear.

ホームページ等

<http://www.ist.osaka-u.ac.jp/japanese/introduction/professors/pure-and-applied-mathematics/combinatorics/takayuki-hibi.html>