【基盤研究（S）】
理工系（数物系科学）

研究課題名　現代解析学と計算科学の手法による乱流の数学的理論の構築

早稲田大学・理工学術院・教授　**小薗（こぞの）　英雄（ひでお）**

研　究　分　野：偏微分方程式論、非線形解析学
キ ー ワ ー ド：ナビエ・ストークス方程式、調和解析学、関数解析学、大域的適切性、漸近解析

【研究の背景・目的】

非線形発展方程式における主要な研究テーマとして、解の時間無限大における漸近挙動が上げられる。研究代表者小薗はナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰について先駆的な研究を行ってきた。これは、元来、ナビエ・ストークス方程式の数学的研究の始祖である Leray によって提唱された有名な問題である。最近、数学解析における解の漸近指数は、数値シミュレーションによる計算結果と完全に一致することが明らかになった。また、数値シミュレーションとの比較において、現代解析学の有力な手法としては、無限大の取り扱いを可能にすることが上げられよう。実際、無限領域を有限領域の極限とみなし、有限領域で得られた種々の厳密量の漸近挙動を求めることは、有限サイズでのみ可能な数値計算結果を本質的に超越する手法を提供するものであろう。一方、金田らはこれまで乱流の計算科学的および統計理論的研究を行ってきた。とくに最も規範的な乱流場である一様等方性乱流について、世界最大規模の DNS 実現の実績（Super Computing 2002, Gordon Bell 賞）を持ち、そのデータ解析に基づいた最先端の知見を有している。また 2 平板間の乱流についても現在世界最大レイノルズ数の DNS を進めている。さらに恣意的パラメータを含まず、最も理論的整合性の高いとされる乱流のスペクトル統計理論の開発を進めてきた。以上のような実績を背景に、本研究では、現代解析学の手法を用いて複雑な流動現象の解明、およびその予測信頼性向上に貢献すべく乱流の数学的理論を構築する。

【研究の方法】

本研究は、数学解析研究班と流体力学研究班の２つ研究グループの連携によって推進する。数学解析研究グループでは、非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学を用いてナビエ・ストークス方程式および簡素化された方程式の解の性質を、数学的厳密理論および数値実験双方の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、乱流の普遍原理に解明に数学的な確証をえる。流体力学グループでは、主として計算科学的方法、とくに大規模直接数値シミュレーション（Direct Numerical Simulation=DNS）による乱流現象の解明、及び、数理物理的根拠を持ち恣意的調節パラメータを含まない情報縮約手法の開発に挑戦する。

（Ⅰ）調和解析学、特異極限と有限性の評価
・無限領域における流れの解析
・渦度の集中と特異点の発生の解明
・乱流の普遍性に対する計算領域サイズの影響評価
（Ⅱ）乱流のもつ普遍的法則性の解明
・粘性領域での渦度集中領域の統計法則
・乱流・非乱流界面近傍の統計法則
・一様等方性乱流の減衰則の検証
（Ⅲ）情報縮約手法、予測可能性、信頼性評価
・2 進分解関数の渦度の表現と方程式の適切性の解明
・乱流の非経験的 LES スペクトルモデルの開発

【期待される成果と意義】

乱流の解明は単に数理解析学や流体力学の分野に留まらず、地球環境、大気・海洋、宇宙・航空、エネルギー、防災等に象徴される社会の諸問題に深く関わっている。大型計算機の発達により簡単化された乱流モデルの構築、小さなスケールの流れの解析がかなりの精度で実現されている。更に無限大や極限といった数学解析独自の手法を展開することにより、これまでの大規模計算科学による流体現象、特に大きなスケールの乱流の普遍原理の確立が「流れの数理」に大いなる成果をもたらす。当該研究課題は、非線形偏微分方程式論の見地からは「ナビエ・ストークス方程式大きなデータに対する解の一意存在」から真正面から取り組むという挑戦的なものである。ここで大きなデータとは、まさに大きなレイノルズ数と同値であり､乱流の解明と密接に関わる。それゆえ本研究の現代解析学と計算科学の手法による「流体数学理論の構築」は、乱流を典型とする非線形超巨大自由度力学系に対する数理科学の新しい応用分野の開拓にも貢献すると期待される。即ちナビエ・ストークス方程式を代表とする非線形偏微分方程式論、更に巨大自由度の非線形力学の変革をもたらしうる重要なものである。

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

・小薗,小川,三沢,これからの非線型偏微分方程式
　日本評論社　2007
・小薗，乱流の数理　パリティ 18, 28--35 (2003).
・小薗，Navier-Stokes 方程式,クレイ研究所ミレニアム懸賞問題解説　数学 54 巻 178--202 (2002).

【研究期間と研究経費】

平成 24 年度－28 年度
147,000 千円

【ホームページ等】

http://www.math.sci.waseda.ac.jp/math/