

## 【基盤研究(S)】

理工系 (数物系科学)



### 研究課題名 非線形発展方程式の凝縮現象と解の構造

京都大学・大学院理学研究科・教授 つつみ よしお  
堤 誉志雄

研究分野：数物系科学, 数学, 基礎解析学

キーワード：関数方程式

#### 【研究の背景・目的】

非線形発展方程式に対し解の性質を調べる際、最も重要なことの一つは、“凝縮現象”とよばれる広い意味での特異性を特徴付けることである。この広い意味での特異性というのは、通常用いられるような、解の滑らかではない部分という意味ではなく、解が持つと期待される性質を阻害する可能性がある解の性質のことを意味する。たとえば、べき乗タイプの非線形項を持つ非線形クライン・ゴールドン方程式や非線形シュレディンガー方程式の非線形散乱問題（すなわち、時刻無限大の近傍で非線形方程式の解が、線形の摂動を受けていない自由解に漸近するかという問題）をエネルギークラスで考えると、方程式やエネルギーは時空間変数についての平行移動や反転に関して不変なため、時間が十分たっても、ある特定の空間領域にエネルギーが局在化し続ける（言い換えると、ソリトン解のように、空間的にエネルギーが局在化した解が存在する）可能性が生じる。従って、このような解の凝縮・集約現象を排除することができれば、非線形散乱理論が構築されることになる。非線形発展方程式において、広い意味での特異性は解の何らかの量（たとえば、 $p$ 乗積分ノルムなど）が局所的に凝縮・集約することにより発生することが多い。本研究では、非線形波動・分散型方程式および反応拡散系方程式や非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を研究対象とし、解の凝縮現象によって代表される広い意味での特異性生成メカニズムを、調和解析的手法（フーリエ制限法や I-method など）を用いて数学的に研究するとともに、それらの凝縮現象を数値シミュレーションによって捉えることを試みる。

#### 【研究の方法】

凝縮現象は様々な解析学的分野において現れる、きわめて興味深い現象であり、理論的解析と数値計算による解析の双方の研究が重要である。その観点から、理論的には近年発展の著しい非線形波動・分散型方程式研究を通して開発された、フーリエ制限法、I-method および最小爆発解の議論を用いて凝縮現象を解析するとともに、これらの方法の改良と新しい研究方法の開発を目指す。また、数値計算の立場からは、精度保証付き数値計算によって、どこまで解の特異性を再現できるかを調べる。そのためには、無限大を含む関数の精度保証理論を研究する必要がある。また、数学理論は非常に抽象的なものを研究対象とするので、研究

者どうしが直接会ってディスカッションを重ねることはきわめて重要である。そのため、研究者の派遣・招へいおよび研究集会の開催などを進める。さらに、若い研究者を本研究に参加させるため、研究支援者雇用を行う。

#### 【期待される成果と意義】

フーリエ制限法は時間局所的に精密な評価式を得るのに有効であり、I-method は弱解の時間大域的な評価式を得るために開発された。最近提唱された最小爆発解論法は、解の漸近挙動を分類するのに有効な理論である。これら 3 つの方法を融合することを目指し、凝縮現象を数学的に統一的に扱う理論あるいはその基礎付けが得られるものと期待される。従って、弱解の大域存在理論や非線形散乱理論の分野において、この研究の意義は非常に高い。また、数値計算の立場から凝縮現象をどのように捉えるか、という問題も重要である。この研究を通して、凝縮現象が再現可能な数値計算スキームの開発・研究の進展が期待される。特に、精度保証付き数値計算により無限を捕まえることができれば他分野への応用も期待され、その意義はきわめて大きいであろう。

#### 【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- ・ K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 28(2010), 1635-1654.
- ・ J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, On the Cauchy problem for the Zakharov system, *J. Funct. Anal.*, 151(1997), 384-436.

#### 【研究期間と研究経費】

平成 23 年度 - 27 年度  
57,700 千円

#### 【ホームページ等】

ホームページなし