

【基盤研究(S)】

理工系(数物系科学)



研究課題名 ホモロジー的ミラー対称性の証明

京都大学・大学院理学研究科・教授 ふかや けんじ
深谷 賢治

研究分野: 数学

キーワード: 微分幾何学, 位相幾何学, 複素多様体, 代数幾何学

【研究の背景・目的】

ミラー対称性予想は、1990年代に物理学者によって提出された予想である。数学者の間でそれが有名になったのは、Calabi-Yau 多様体の有理曲線の数が定める母関数が、そのミラーと呼ばれる Calabi-Yau 多様体の複素構造の変形理論から決まる微分方程式を満たすという予想 (Candelas たちによる) によってである。

この予想そのものは Givental らにより多くの場合に証明され、古典的ミラー対称性と呼ばれる。

1994年に M.Kontsevitch が提出したホモロジー的ミラー対称性予想はそれを深めるもので、シンプレクティック多様体のフレアーホモロジーによって定まる圏 (深谷圏) とそのミラーである複素多様体の接続層の導来圏の圏同形を予想する。

この予想は 2009年に深谷らがラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーの一般的に定義を完成したことにより、数学的な定式化が完成した。

この研究では、ホモロジー的ミラー対称性予想の証明を目指したい。

【研究の方法】

ホモロジー的ミラー対称性の証明のアイデアとして、族のフレアーホモロジーを用いる方法と、トーリック多様体のミラー対称性を先に示し、その部分多様体同士のミラーに進む方法が知られている。前者は Strominger-Yau-Zaslow のアイデア、すなわち、ミラー多様体をトラスファイバー空間のファイバーごとの双対として実現するやり方も深い関係を持つ。族のフレアーホモロジーを用いるホモロジー的ミラー対称性の証明のアイデアは 1997年頃 M.Kontsevitch と深谷によって提案されたもので実現に向けて研究を進める段階になってきている。

後者は、Givental が古典ミラー対称性を示すときに用いたものともいえ、Hori-Vafa がミラー対称性の (物理的) 証明として提示したのもこのアイデアである。深谷-Oh-太田-小野は、トーリック多様体のラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーの研究を押し進めており、その場合には、ホモロジー的ミラー対称性の証明を含めて、ミラー対称性で重要なフレアーホモロジーについて、多くの結果を出した。これをさらに発展させることで、この方法による証明にも進んでいきたい。

【期待される成果と意義】

ホモロジー的ミラー対称性の証明はシンプレクティック幾何学にも下記のような応用があると考えられる。擬正則曲線の理論は大域シンプレクティック幾何学において中心的方法である。この方法により、グロモフ-ウィッテン不変量やフレアーホモロジーなどの重要な不変量が得られ、それらの研究が大域シンプレクティック幾何学の中心的な諸問題になっている。

擬正則曲線の理論から得られる不変量を研究する上で一番難しい点は、計算である。擬正則曲線の理論の中心をなすモジュライ空間は、非線形方程式の解のなす空間である。不変量を定義に従って計算するには、このような解空間を決定する必要がある。勿論、これは一般には、困難である。ホモロジー的ミラー対称性予想は、このような困難な不変量を複素幾何学にうつって計算する道を開く。

むしろこの予想の証明は、元来の由来であるミラー対称性や弦理論の理解にも役立つと考えられる。

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, } International Press/Amer. Math. Soc. (2009).

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I, Duke Math. J. 151 (2010), 23-174. ibid II Selecta Math. New Ser. (2011) 17:609-711

Cyclic symmetry and adic convergence in Lagrangian Floer theory, Kyoto J. Math. 50 (2010) 521--590

【研究期間と研究経費】

平成23年度-27年度
81,600千円

【ホームページ等】

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/>