【基盤研究（S）】
理工系（数物系科学）

研究課題名　幾何学的モジュライ理論の深化と理論的応用

北海道大学・大学院理学研究院・名誉教授　中村（なかむら）　郁（いく）

研　究　分　野：理工系・数物系科学・数学・代数学
キ ー ワ ー ド：代数幾何

【研究の背景・目的】

同種類の幾何学的対象は、一斉にいくつかのパラメーターを用いて表示されることが多い。このパラメーターの定める空間をモジュライ空間と呼ぶ。幾何学的対象のあらゆる変化の中でもっとも重要なのは、「自然で安定な」ものである。「自然で安定な」極限をすべて集めた空間をモジュライ空間のコンパクト化と呼ぶ。重要な点は、このコンパクト化に現れた対象以外には、その幾何学的対象の変化を考える必要が（殆ど）ない、ということである。モジュライ空間のコンパクト化を求めると、さまざまな理論的応用がある。本課題に関連した最近までの進展は以下のとおりである（[　]は関連文献を表す）：

1. 中村[1][2]は非可換レベルつきアーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を 2 つ構成し，Hilbert 点の安定性との関連を明らかにした。
2. 寺尾[6]は経済統計学者 紙屋，竹村と，超平面配置の補集合を各個人の選好のモジュライ空間と同一視，優先順位付け模型の個数の公式を与えた．
3. 小野 [3] は,『閉じたシンプレクティック多様体のハミルトン写像の不動点が全て非退化ならば,（不動点の個数の上限に関する)Betti 数版 Arnold 予想は正しい』ことを証明した。
4. 岩崎は[4]でパンルヴェ方程式のモジュライ論的定式化を与え、パンルヴェ VI 方程式のエントロピー，孤立周期点の個数の増大度，その解の解析接続に伴う力学系のカオス的構造を研究した．

本研究の目的は、上に述べたモジュライ空間のコンパクト化の研究をさらに深化、異なる領域の理論に応用をはかることである。

【研究の方法】

(1) 良い素点でのアーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を詳しく記述する．(退化)アーベル多様体の自然な定義方程式を書き下し，その係数として主要な Siegel 保型形式を構成する．悪い素点までアーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を拡張する．そのために，モジュラー曲線に関する Katz-Mazur 理論[5] を Dieudonne 理論を用いて高次元に一般化する．

(2) 超平面配置の代数的な研究を通して，超幾何級数，超平面配置の補空間や原始積分の理論の深化を目指す．超平面配置(代数学)を(社会科学者との研究交流により)社会科学に応用する．

(3) ラグランジュ・フレア理論(微分幾何学)とポテンシャル関数の変形理論の間のミラー対称性，ないし，ギベンタールのミラー対称性理論(代数幾何学，物理学)の間の関係を明らかにする．

(4) モジュライ空間のコンパクト化(代数幾何学)を用いて，他のパンルヴェ型の方程式(微分方程式)のエントロピー，孤立周期点，解の解析接続に伴う力学系のカオス的構造，ランダム・モノドロミーを決定する．

【期待される成果と意義】

(1)では、モジュライ函手は表現可能なので，原理的には、主要な Siegel 保型形式はすべて現れる．これにより，合同部分群 Gamma(N)の主要な Siegel 保型形式を表現付きで，すべて求めることのできる可能性がある．**(1)**の Katz-Mazur 理論 の高次元化は長年の未解決問題である。悪い素点での振る舞いが、Heisenberg 群の表現論を通して正確に記述できる可能性がある。**(2)**の発展は代数学の社会科学への応用と言う点で注目に値する．**(3)**によるミラー対称性の研究)、**(4)**のパンルヴェ方程式の代数幾何学的研究は新しい方向であり，国際的に評価が高い．

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

[1] I.Nakamura, Stability of degenerate abelian varieties, Inv. math., vol. 136, 659-715 (1999).
[2] I. Nakamura, Another canonical compactifi-cation of the moduli space of abelian varieties, ASPM of MSJ., vol. 58, pp. 69-135, (2010).
[3] K.Fukaya, K.Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten inv., Topology, vol. 38 (1999).
[4] M.Inaba, K.Iwasaki, M.-H.Saito, Moduli of stable parabolic connections,…,geometry of Painleve equation of type VI, part I, Publ. Res. Inst. Math. Sci., vol. 42, 987-1089 (2006).
[5] N.M.Katz and B.Mazur, Arithmetic moduli of elliptic curves, Princeton (1985).
[6] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements …, J. Alg. Comb.,vol. 27, 317-330 (2008).

【研究期間と研究経費】

平成２３年度－２７年度
１３９，３００千円

【ホームページ等】

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nakamura/