【理工系（数物系科学）】

非線形偏微分方程式の大域的適切性

小薗（こその）　英雄（ひでお）

（東北大学・大学院理学研究科・教授）

【研究の概要等】

数理物理学の基礎方程式，数理生物学のモデルである非線形偏微分方程式を広範囲に渡って対象とし，解の存在，一意性，安定性といった“適切性”を研究する．定常方程式については，単に全空間だけでなく，内部境界値問題の場合には，種数など領域の位相不変量が方程式の可解性に与える影響をも対象とする．また外部境界値問題においては，障害物の形状に依存した解の非等方的な振る舞い，あるいは無限遠方における解の挙動の一意性への影響を考察したい．時間発展方程式については，局所適切性にとどまらず，例えば初期データが属する関数空間のノルムの最良定数を求めることにより時間大域的可解性を明らかにする．このように対象とする領域の形状や空間および時間無限大での解の漸近挙動といった“大域的性質”を解析し，非線形偏微分方程式の解の構造に関して統一理論を構築することが本研究の目的である．とりわけ，ナビエ・ストークス方程式に対する大きな初期データに対する時間大域的な古典解の存在は，ミレニアムの数学難問題７題の１つとしてクレイ研究所が懸賞付き（百万ドル）で提唱しており，本研究課題そのものである．

【当該研究から期待される成果】

非圧縮性条件からは各連結成分における流量の“総和がゼロ”というより緩和された条件下での解の存在が大きな未解決問題である．本研究では，領域の境界において法線方向と平行である3次元調和ベクトル場の特徴付けを行う．応用として，与えられた境界値の流量と方程式の可解性の関係を，領域の位相不変量の観点から論じることが期待されよう. また, 最近, 実関数論の手法を駆使してend point Strichartz's estimate が開発され, 線形化方程式に付随する発展作用素の L^p-L^q 評価において，許容指数 p，q が臨界値においてさえも成り立つことが証明されている．従来の 零形式に注目した基本解による時間-空間の評価の方法に加えて，非線形偏微分方程式の一般的解法の確立が期待できる．

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

・小薗英雄　Navier-Stokes 方程式　クレイ研究所ミレニアム懸賞問題解説．数学 54巻 (2002)　178--202.

・小薗英雄，小川卓克， 三沢正史， これからの非線型偏微分方程式　日本評論社　2007.

【研究期間】　平成20年度－24年度	**【研究期間の配分（予定）額】** **136,800,000 円**　(直接経費)

【ホームページアドレス】http://www.math.tohoku.ac.jp/researchfields/kozono.html