

格子、保型形式とモジュライ空間の総合的研究

Lattices, automorphic forms and moduli spaces

金銅 誠之 (KONDO SHIGEYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授



研究の概要

近年、代数幾何学、数理物理学、ムーンシャイン予想と関係した有限単純群論等に、格子や保型形式がしばしば登場する。本研究計画では、代数幾何学にとどまらず、これら周辺分野も視野に入れた広い観点に立ち、格子理論や保型形式論を用いた代数多様体の自己同型群やモジュライ空間の研究を行う。

研究分野：数物系科学、数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、モジュライ空間、格子、保型形式、K3 曲面

1. 研究開始当初の背景

1970年代にK3曲面の周期理論が確立され、そのモジュライ空間がIV型有界対称領域の算術商で記述されることが分かった。その後、ミラー対称性など数理物理学からの刺激も受けながら盛んに研究されてきた。さらにK3曲面の自己同型群と散在型有限単純群マッシュー群の関係やリーチ格子との関係、Borcherds によるIV型有界対称領域上の保型形式論を用いたモジュライ空間の研究など、代数幾何学の分野を超えた研究の広がりが見えてきた。

2. 研究の目的

楕円曲線論をひな形に、格子理論や保型形式論等を用い、K3 曲面、その高次元版であるカラビ・ヤウ多様体やそれらのモジュライ空間の幾何学的研究を進めることが、第一の目的である。一方で、K3 曲面の自己同型群や幾何とマッシュー群やリーチ格子との関係、ムーンシャイン予想と呼ばれる K3 曲面とマッシュー群の間の新たに発見された不思議な現象などを研究することが、第2の目的である。

3. 研究の方法

専門分野にとどまらず分野横断的なセミナーや国際研究集会を組織し、その中で議論を重ね新たな視点や問題意識を得ながら研究を進めていく。

4. これまでの成果

(a) モジュライ空間と保型形式の研究

様々な代数多様体のモジュライ空間が IV 型有界対称領域やその部分領域である複素超球の算術商として実現されることを、研究代表者が得ていた。研究代表者の金銅は、この状況に Borcherds による保型形式論を適用することで古典的な代数幾何学的結果が保型形式の観点から再構成できることを示した。具体的には Coble による平面 4 次曲線のモジュライ空間の射影モデルの保型形式を用いた構成などがあげられる。

モジュライ空間の有理性の問題は困難な問題の一つである。研究代表者の金銅は Dolgachev との共同研究で Coble 曲面のモジュライ空間の有理性を示した。また K3 曲面とその対合の組からなる 2-初等的 K3 曲面のモジュライ空間は 75 種類の族からなるが、研究分担者の馬昭平は 2 つの族を除いてそれらが有理的であることを証明した。複素幾何学的側面からは、連携研究者の吉川謙一が 2-初等的 K3 曲面のモジュライ空間の同変解析的ねじれ率を Borcherds の保型形式の言葉で決定した。

(b) 有限群と自己同型群の研究

研究代表者の金銅、連携研究者の島田伊知朗は、有限単純群にしばしば現れるリーチ格子

の理論を用いて、標数 3 の代数閉体上定義された超特異 K3 曲面で最も特殊なアルチン不変量が 1 の曲面の自己同型群の生成元を見いだした。また超特異 K3 曲面のネロン・セヴェリ格子のある種の双対性を見いだした。

K3 曲面に自己同型として作用する有限群と散在型有限単純の一つである次数 24 のマッシュ群 M24 との関係が向井の結果として知られていた。連携研究者の向井茂らによって、K3 曲面の固定点を持たない対合による商として現れるエンリケス曲面と M24 のマッシュ群の部分群である次数 12 のマッシュ群 M12 との関係が解明されてきた。

特殊線形群 $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群に関するマッカーイ対応は有名であるが、この高次元化は大きな問題である。研究分担者の伊藤由佳理たちによって $SL(3, \mathbb{C})$ の非可換有限部分群に対して新たな成果が得られた。

(c) カラビ・ヤウ多様体の研究

連携研究者の小木曾啓示は、カラビ・ヤウ多様体の双有理変換群について双有理幾何学の立場と複素力学系の立場から研究し、特に奇数次元のピカル数 2 のカラビ・ヤウ多様体の自己同型群の有限性を示した。またエンリケス曲面の高次元版であるエンリケス多様体の一般論も得ている。

(d) 数理論理との関係

江口・大栗・立川により、K3 曲面の楕円種数を $N=4$ 超共形代数の指標で展開すると展開係数がマッシュ群 M24 の既約表現の次数の和で表される事が見いだされていた。この現象は J 関数に関する有名なモンスター・ムーンシャイン (monstrous moonshine) に似ているので、マッシュ・ムーンシャインと呼ばれている。研究分担者の江口徹らは、マッシュ・ムーンシャインを半分にしたエンリケス曲面に関係したマッシュ群 M12 のムーンシャインを新たに見いだした。

研究分担者の菅野浩明らは、面作用素を入れた 4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論のネクラソフ分配関数を枠付き放物振れ無し層のモジュライ空間の同変コホモロジーに関する指標公式を用いて計算し、さらに、この結果がある種の縮退場を挿入した共形ブロックや適当なトーリックカラビ・ヤウ多様体上の位相的開弦振幅と一致することを示した。

5. 今後の計画

平成 25 年 6 月に、京都大学数理解析研究所において、モジュライ理論の発展 (Development of moduli theory) をテーマにしたレクチャーシリーズと国際研究集会を連続して開催する。

6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

【発表論文】

(1) I. Dolgachev, S. Kondo, The rationality of the moduli spaces of Coble surfaces and of nodal Enriques surfaces, Izvestiya. Mathematics (I.R. Shafarevich 90 歳記念号)、掲載予定。

(2) S. Ma, Rationality of the moduli spaces of 2-elementary K3 surfaces, J. Algebraic Geometry, 掲載予定。

(3) S. Mukai, H. Ohashi, Enriques surfaces of Hutchinson-Gopel type and Mathieu automorphisms, in Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau Threefolds, Fields Inst. for Research in Math. Sciences, 掲載予定。

(4) T. Eguchi, K. Hikami, Twisted Elliptic Genus and Borcherds, Product, Lett. Math. Phys., 102 (2012) 203-222.

(5) K. -I. Yoshikawa, K3 surfaces with invariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III, Math. Zeit., 272 (2012), 175-190.

(6) S. Kondo, Moduli of plane quartics, Gopel invariants and Borcherds products, Int. Math. Res. Notices, vol. 2011, No.12 (2011) 2825-2860.

【受賞】

- ・ 2011 年 3 月、第 7 回日本学術振興会賞、伊山 修「整環の表現論」
- ・ 2012 年 3 月、代数学賞、金銅 誠之「K3 曲面の幾何と保型形式の研究」
- ・ 2012 年 9 月、日本数学会建部賢弘賞奨励賞、馬 昭平「K3 曲面のモジュライの研究」

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kondo/>