

流れ問題のための高品質数値解法の開発と解析とシミュレーション  
Development and analysis of high-quality numerical methods and simulation for flow problems

田端 正久 (TABATA Masahisa)  
国立大学法人 九州大学・大学院数理学研究院・教授



研究の概要

熱対流問題に対する有限要素法の誤差評価の確立とその応用  
流れ問題に対する精度保証付き数値計算手法の確立とその応用  
混相流問題に対するエネルギー安定有限要素法の開発  
ナビエ・ストークス方程式のための特性曲線有限要素法の開発

研究分野：数値解析

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：非圧縮粘性流体，有限要素法，計算機援用証明，精度保証計算

1. 研究開始当初の背景

流れ問題の数値計算とシミュレーションは多くの分野でなされているが，数値計算スキームの正当性，事前事後評価を考慮して数値解法の開発に取り組んでいるグループは少ない．偏微分方程式の数値解法という立場から，数学と計算機を背景に，流れ問題の数値解法の共通基盤として，実用的な信頼あるスキームを構成する．

2. 研究の目的

非縮粘性流れ問題，移動境界問題に対して数学的に正当化された高品質数値解法の開発と解析を行い，その解法に基づいた計算スキームを作成し，数値シミュレーションを実践する．流れ問題に対して，区間演算を伴う精度保証計算を導入し，解の存在を計算機援用証明で示すと同時に解の事後評価を行う．

3. 研究の方法

主な購入設備は高性能パーソナルコンピュータとデータ保存用ハードディスクアレイであり，九州大学情報基盤研究開発センターの計算機を年間資源占有タイプで借用した．問題の物理的数学的構造の解析，計算手法の開発と解析，スキームの構築，コードの作成，数値シミュレーションを行った．

4. 研究の主な成果

(1) 熱対流問題に対する有限要素法の誤差評価の確立とその応用[6], [7], [8]

非定常熱対流問題は，ナビエ・ストークス方程式と熱エネルギー方程式が連立した問題であり，多くの数値計算がなされている．数値解の収束性に関しては，半離散

近似など非常に限定的な結果しか得られていなかった．実際の計算に用いられる全離散有限要素近似に対して初めて，包括的な誤差評価を与えた．係数が温度に依存している場合も含んでいる．遅い流れの熱対流問題で温度依存係数を持つ場合にも，安定化有限要素法を用いて収束性を示した．係数の温度依存性は，地球マントル対流やガラス溶融炉内流れ問題などの現実的な問題で本質的に重要である．高レイリー数に対応したスキームを開発し地球マントル対流の数値計算に用い，粘性係数の温度依存性が3次元対流パターンに如何に反映するかを明確に捕らえた．

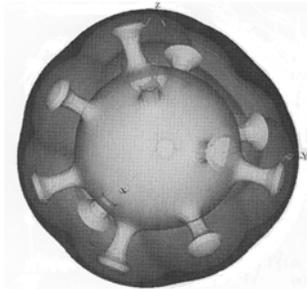


図1. 地球マントル対流[6]

(2) 流れ問題に対する精度保証付き数値計算手法の確立とその応用[2], [3], [5]

精度保証付き数値計算は区間演算を用いるので計算量が増えるが，厳密解の存在証明をも与えることができる．流れ問題へ精度保証計算を適用するに際して，数値的検証手法の改善を行い，多くの明確な成果が得られた．その中から2つの結果を述べる．3次元熱対流問題で蜂の巣タイプや矩形タイプの分岐解が新たに存在することを数値的に証明した．オーア・ゾンマーフェルト方程式の固有値問題を解いて2次元ポワズイユ流がレイノルズ

数 5, 775 では不安定であることを示した.

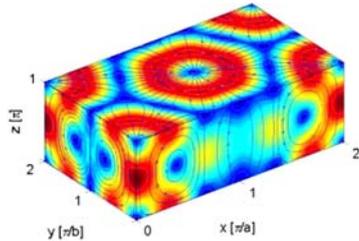


図 2. 熱対流問題の蜂の巣パターン[2]  
(3) 混相流問題に対するエネルギー安定有限要素法の開発[4]

流れ問題の数値解析において, 単一のナビエ・ストークス方程式で記述される標準的な流れ問題では計算スキームの安定性と収束性の理論は確立し実用計算に有効に使われている. 一方, 気液二相流など, それぞれの流体がナビエ・ストークス方程式に支配され, 界面で表面張力を伴う混相流問題に対しては収束性が確立されたスキームは得られていない. 安定性に関しては, 唯一 Bansch の結果があるが, 計算手間が大きく, 実用計算には用いられていない. 界面で表面張力が働く場合に, エネルギーの意味で安定な計算ができるエネルギー安定有限要素法を開発した. この方法は界面追跡法に属し, 時間を要する計算主要部分は単一のナビエ・ストークス問題と同じであり, 実用的な混相流問題の解法である. エネルギー安定性の基準を計算して安定な計算の進行状況を知ることができる. スキームは表面張力の取扱いも込めて数学的に非常に自然な枠組みで導か

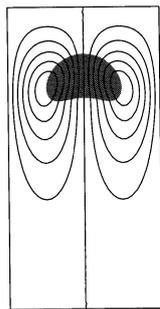


図 3. 気泡の上昇[4]

(4) 特性曲線有限要素法の開発[1]

流れ問題が構造問題と大きく異なる点は通常, 解くべき連立一次方程式の行列が非対称になることである. そのため, 大規模数値計算を難しくしている. 特性曲線法はこの点を克服し計算に必要な行列は対称である. 我々は従来の時間 1 次精度を 1 段階 2 次精度に上げる理論を移流拡散方程式で確立していた. 本研究では, ナヴィエ・ストークス方程式に拡張して, 2 次精

度スキームを作成した. その際, 圧力強形式がより安定であることを見出した. さらに, 3 次元問題の計算を軽減できるように, 圧力安定化特性曲線有限要素法も開発した. この方法では流速, 圧力ともに四面体一次要素を使うことができ, 行列の対称性と共に計算の一層の軽量化が可能になった.

5. 得られた成果の世界・日本における位置づけとインパクト

今回, 開発した流れ問題のための数値計算スキームはいずれも国際的にも斬新な発想に基づいた数学的に正当なものであり, 国内外からすでに関心を寄せられている. 精度保証計算の結果は厳密な結果として初めて得られたもので, 流体力学分野での理論解析に大きなインパクトを及ぼすものと思われる.

6. 主な発表論文

- [1] Notsu, H. and **Tabata, M.**, A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Scientific Computing*, 38(2009), 1-14.
- [2] Kim, M.-N., **Nakao, M. T.**, **Watanabe, Y.** and Nishida, T., A numerical verification method of bifurcating solutions for 3-dimensional Rayleigh-Bénard problems, *Numerische Mathematik*, 111(2009), 389-406.
- [3] **Watanabe, Y.**, Plum, M. and **Nakao, M. T.**, A computer-assisted instability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 89(2009), 5-18.
- [4] **Tabata, M.**, Finite element schemes based on energy-stable approximation for two-fluid flow problems with surface tension, *Hokkaido Mathematical Journal*, 36(2007), 875-890.
- [5] **Nagatou, K.**, Hashimoto, K. and **Nakao, M. T.**, Numerical verification of stationary solutions for Navier-Stokes problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 199(2007), 445-451.
- [6] **Tabata, M.**, Finite element approximation to infinite Prandtl number Boussinesq equations with temperature-dependent coefficients - Thermal convection problems in a spherical shell, *Future Generation Computer Systems*, 22(2006), 521-531.
- [7] **Suzuki, A.** and **Tabata, M.**, Finite element matrices in congruent subdomains and their effective use for large-scale computations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(2005), 1807-1831.
- [8] **Tabata, M.** and Tagami, D., Error estimates of finite element methods for nonstationary thermal convection problems with temperature-dependent coefficients, *Numerische Mathematik*, 100(2005), 351-372.