平成１５年度採択分
平成２１年３月３１日現在

非線形偏微分方程式の大域的可解性と解の漸近挙動に関する統一的理論

United theory of existence of global solution and its asymptotic behavior to the nonlinear partial differential equations

小薗 英雄（Hideo KOZONO）
東北大学・大学院理学研究科・教授

研究の概要
数理物理学の基礎方程式，生態系のモデルである非線形偏微分方程式を広範囲に渡って対象とし，解の存在一意性，安定性といった”適切性”を研究する．手法として，従来の関数解析学や変分学的なアプローチに加えて，調和解析学を取り入れることに本研究の特色がある．

研　究　分　野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キ　ー　ワ　ー　ド：非線形解析学，偏微分方程式，調和解析学，関数解析学

１．研究開始当初の背景

変分学の「峠の補題」，「concentration compactness」，調和解析学の Hardy - Besov 空間の理論等に見られる様に，非線形解析学は純粋数学と表裏一体となって研究が急速に進歩している．このことは，94 年の P.L.Lions（変分学的方法による非線形偏微分方程式の解法），Bourugain（調和解析学方法による非線形偏微分方程式の解法）両氏のフィールズ賞受賞以来の強い流れである．そこで，本研究ではこの数年間に基礎および応解析学の強力なスタッフを揃えた東北大数学教室をキーステーションとして，20 世紀後半の目覚ましい解析学の成果を基礎に，非線形偏微分方程式の多岐に渡って，その局所的・大域的適切性を統一的に研究し，新世紀初頭に新たな理論を構築することを目指す．

２．研究の目的

ナビエ・ストークス方程式に関して未解決である時間大域的一意可解性の問題を考察する．非線形波動方程式においては，非線形項の特殊な代数的構造に注目し，解の特異点の伝幡が線形化方程式の基本解に関係するごく特殊な領域にしか現れなことを証明する．Gierer-Meinhardt によって提唱された方程式（G-M 方程式）に関して「空間非一様な状態が安定になる．」という予想を考察する．

３．研究の方法

（主な購入設備等を含む）

流体体力学の基礎方程式，非線形波動・分散型方程式，反応拡散型方程式，非線形散乱理論，調和解析学とその非線形偏微方程式への応用の 5 部門からなる研究班を組織を編成し研究の遂行に当たる．

４．研究の主な成果

（図・写真等含めても良い）

１．流体力学の基礎方程式の研究成果

1.1.Navier-Stokes 方程式の強解とエネルギー等式

n 次元 Euclid 空間において Navier-Stokes 方程式の強解で，乗可積分空間に値をとる時間の関数として連続な解は，必然的にエネルギー等式 (E)を満たすことを証明した．その際，強解の局所存在時間の特徴付けと一意性の関係を明らかにした．

1.2. 無限遠方で減衰しない初期値に対する Navier-Stokes 方程式の局所古典解の存在

斉次ベゾフ空間における双線形評価式と基本解の L^p-L^q$評価を確立し，本質的に有界である関数空間よりもやや広い非斉次ベゾフ空間に初期値をとる Navier-Stokes 方程式の時間局所解の一意存在定理を証明した．さらに，解の時間延長可能性について，渦度が斉次ベゾフ空間に値をとる関数として可積分であれば十分であることを示した．

1.3. 自由度 2 の渦度ベクトル束縛による Navier-Stokes 方程式の局所古典解の延長可能性

3 次元空間における Navier-Stokes 方程式の古典解の時間延長には，渦度ベクトルの３成分すべてを束縛する必要はなく，自由度２の制限すればで十分であることを示した．Beale-Kato-Majda が定式化した本質的有界より広い平均振動有界関数空間において延長可能性が判定できることを証明したことは，調和解析学の視点からの数学的な改良であると言えよう．

〔４．研究の主な成果（続き)〕

1.4. 弱型可積分空間における Navier-Stokes 方程式の弱解の内部正則性

Serrin の提唱した渦度の方程式に着目して，速度場に対する境界条件の制限を取り除くことに成功した．実際，対象となる超関数の意味での解がSerrin型の弱可積分空間に属するならば，正則であることが証明された．応用として，弱解の孤立特異点の除去可能性定理が得られる．

1.5. 斉次 Triebel-Lizorkin 空間にける双線形評価とそのNavier-Stokes 方程式 への応用

斉次 Triebel-Lizorkin 空間における双線形評価を確立し，応用として，Navire-Stokes 方程式の区間(0, T)における古典解が，あるスケール不変な関数空間に属していれば，T'＞T　が存在して，解は(0, T')に滑らかな関数として延長可能であることを証明した．

1.6. 任意の非有界領域における Navier-Stokes 方程式の強エネルギー不等式と一般化された不等式

Stokes方程式をより広い関数空間 L^2＋ L^r　において考察し，弱い形の最大正則定理が成り立つことを証明した．応用として，弱解に付随する圧力関数の領域全体での挙動を解明することができた．この系として，Leray 以来の懸案であった任意の自乗可積分初期データに対する乱流解および適切な弱解の存在問題の解決を見た．

２．反応拡散方程式の研究成果

2.1. ３重結合を持つ界面ダイナミクス

複数個の３重結節点を持つ界面に対して帰納法を用いて定常状態の存在を示した．また，存在を示す過程において，不安定次元が異なる定常状態が２個存在することが明らかになった．

2.2. 高次元パターンダイナミクス

指数がある臨界値より大きいときに非有界大域解が存在することを示し，またその増大度や増大点の集合の構造について明らかにした．

2.3. 安定な時空間構造生成のメカニズム

ある準線形放物型方程式に対し，初期値に応じて大域的増大解，進行波解，有限時間消滅解のいずれかに分類されることを示し，その漸近挙動や消滅時刻における解の振る舞いについて調べた．

2.4. 熱方程式の解の形状の決定

熱方程式の解の空間変数に関する最大点の挙動の時間無限大での漸近挙動について研究を行った．

５．得られた成果の世界・日本における位置づけとインパクト

流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes(N-S)方程式の「大きな初期値に対する時間大域的な滑らかな解の存在問題」は Leray 以来の懸案であり，これまで部分的な解決があるものの 70 年以上経った今日においても未解決である．研究成果は，

(i)(N-S) の Cauchy 問題の適切性の研究

(ii) 外部領域における(N-S)の数学的理論の新展開，特に物体を通り過ぎる流れの現象解析

(iii) 一般の非有界領域における強エネルギー不等式問題の解決と乱流解の構成

(iv) 調和解析学における理論の発展とその(N-S) への応用

である．当該研究の進歩が単に数学の分野のみにとどまらず自然科学や工学へと波及する大きなインパクトを持つと思われる．

６．主な発表論文

（研究代表者は太字､研究分担者は二重下線､連携研究者は一重下線）

1.**Kozono,H.**,Sugiyama,Y.,The Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak and its application to self-similar solutions. Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), 1467-1500.

2.Farwig,R.,**Kozono,H**,.Sohr,H.,Maximal regularity of the Stokes operator in general unbounded domains of　. Functional analysis and evolution equations, 257-272, Birkhauser, Basel, 2008.

3.**Kozono,H.**,Sugiyama,Y.,Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller-Segel system. J. Evol. Equ. 8 (2008), 353-378.

4.**Kozono,H.,**Wadade,H.,Remarks on Gagliardo Nirenberg type inequality with critical Sobolev space and BMO. Math..Z.259 (2008), 935-950.

5.Farwig,R.,**Kozono,H.**,Sohr,H.,Local in time regularity properties of the Navier-Stokes equations. Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), 2111-2131.

6.Farwig,R.,**Kozono,H.**,Sohr,H,. The Stokes resolvent problem in general unbounded domains. Kyoto Conference on the Navier-Stokes Equations and their Applications, 79-91, RIMS K?ky?roku Bessatsu, B1, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.

7.Farwig,R.,**Kozono,H.**, Sohr,H., On the Helmholtz decomposition in general unbounded domains. Arch. Math. (Basel) 88 (2007), no. 3, 239-248.

ホームページ等

http://www.math.tohoku.ac.jp/japanese/text/researchfields_t/kozono-t.html